



Diogo Dias Saraiva

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

Identificação de forças com base no conceito de Transmissibilidade

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia
Mecânica

Orientador: Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva, Professor Auxiliar Convidado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Co-orientador: Doutor António Paulo Vale Urgueira, Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri

Presidente: Doutora Marta Isabel Pimenta Verdete da Silva Carvalho, Professora Auxiliar Convidada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Vogal: Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva, Professor Auxiliar Convidado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Arguente: Doutor Fernando da Conceição Batista, Professor Adjunto da Escola superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria



**FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**

Dezembro, 2017

Identificação de forças com base no conceito de Transmissibilidade

Copyright © Diogo Dias Saraiva, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Este trabalho foi redigido, respeitando o novo acordo ortográfico em vigor.

À minha família

«Se o Tempo e o Espaço
são relativos, *Realitas idem*.
A Verdade, essa é absoluta.»
Diogo Saraiva

AGRADECIMENTOS

São parcas as situações em que existe sucesso sem ajuda, e é com grande orgulho, e alguma saudade, que agradeço a todos que me ajudaram no decorrer deste percurso académico.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à minha família pelo suporte emocional e financeiro, pelas palavras de força, por todos os atos que aliviaram o fardo ao longo desta jornada. Só convosco foi possível aprender mais, concretizar a experiência que foi o Erasmus, ir para os cafés da faculdade em vez das aulas (como vos prometi, foi em 6 anos). Em suma, muito obrigado por me terem moldado no homem que sou e por ter alcançado o que tenho hoje.

Um enorme obrigado aos amigos. Alguns de passagem, outros perduraram, alguns para sempre (espero), mas todos contribuíram para que esta fosse a melhor experiência que tive até aos dias de hoje. Como alguém por quem tenho muita estima uma vez disse, “o que interessa é convívio”. Às vezes, o conhecimento não chega, são precisas memórias, experiências, todo um conjunto de momentos, singularidades, que fazem um indivíduo crescer e aprender que quase nada se faz sozinho. Muito obrigado a todos pela ajuda.

Um muito obrigado a todos os docentes do Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, pelas ferramentas necessárias à formação em Engenharia e por todas as competências transversais transmitidas.

Este foi o maior projeto que fiz e o mais importante, pelo que gostaria de agradecer a algumas pessoas em particular devido à sua contribuição:

Ao meu orientador, Tiago Silva, por me ter proposto este desafio, por ter contribuído com o seu conhecimento na realização desta Dissertação, pelas suas correções, críticas e sugestões que me ajudaram e deram força na realização deste projeto.

Ao meu co-orientador, António Urgueira, pela paciência, preocupação, disponibilidade e, acima de tudo, pelos conhecimentos transmitidos.

Ao meu amigo, João Pereira, pelas longas noites a trabalhar, pela colaboração, pela discussão de matéria de Vibrações, pela mini-tese.

Ao Pedro Riscado, por toda a instrução e conhecimento oferecidos na componente experimental deste trabalho.

À Anayza, ao Gonçalo, ao Tiago, ao Ricardo, ao Diogo, ao Paulo, pela amizade, pelas noites de aço e rigidez.

RESUMO

A criação de novas técnicas que permitem identificar forças aplicadas a um sistema tem-se revelado um avanço crucial na área da dinâmica estrutural. Nos dias de hoje, é possível modelar estruturas complexas, respondendo assim aos problemas que sempre têm existido na área.

A utilização do conceito de transmissibilidade em sistemas com múltiplos graus de liberdade é um princípio que se tem desenvolvido nos últimos anos, tendo-se revelado muito vantajoso na técnica de localização, quantificação e reconstrução de forças dinâmicas aplicadas a estruturas. No entanto, no âmbito experimental, a aquisição de dados que permitem comprovar este método está limitada, normalmente, a sensores que estejam em contacto com a estrutura.

Neste contexto, no âmbito da unidade curricular da dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, este projeto tem como finalidade confirmar a metodologia que procura identificar forças com base no conceito da transmissibilidade de deslocamentos, através de uma técnica de aquisição de dados, utilizando sensores não-contacto com a estrutura.

São apresentadas simulações numéricas, que confirmam o método já enunciado, e dois procedimentos experimentais: o 1.º recorrendo a sensores não-contacto denominados de sensores de efeito de Hall; o 2.º recorrendo a sensores em contacto com a estrutura denominados de sensores acelerómetros piezoelétricos. Este projeto visa avaliar a viabilidade na utilização dos sensores de efeito de Hall, em alternativa aos piezoelétricos.

Conclui-se que é possível identificar forças com base no conceito da transmissibilidade, tanto numa via computacional, como experimental. Porém, no âmbito experimental, esta identificação foi verificada utilizando sensores piezoelétricos convencionais, pelo que não foi possível confirmar a sua aplicabilidade da metodologia em estudo utilizando sensores não-contacto.

PALAVRAS CHAVE

Identificação de forças, Transmissibilidade de deslocamento, Sensores não-contacto, Sensores acelerómetros piezoelétricos

ABSTRACT

The creation of new techniques to identify forces applied to a system has proved to be a crucial advance in the area of structural dynamics. Nowadays, it is possible to model complex structures, thus responding to the problems that have always existed in the area.

The use of the concept of transmissibility in multi degrees of freedom systems, is a principle that has been developed in recent years, and has proved very advantageous in the technique of locating, quantifying and reconstructing dynamic forces applied to structures. However, in the experimental scope, the acquisition of data that allows to prove this method is, normally, limited to sensors that are in contact with the structure.

In this context, within the scope of the Master thesis in Mechanical Engineering, this project has the purpose of confirming the methodology that allows force identification based on the concept of displacement transmissibility, through a technique of data acquisition, using non-contact sensors with the structure.

Numerical simulations are presented, which confirm the already stated method, and two experimental proceedings: the 1st using non-contact sensors called Hall effect sensors; the 2nd using sensors in contact with the structure called piezoelectric sensors. This project aims to evaluate the feasibility of using Hall effect sensors, alternatively to piezoelectric sensors.

It is concluded that it is possible to identify forces based on the concept of transmissibility, both in a computational and experimental way. However, in the experimental area, this identification was verified using conventional piezoelectric sensors, so it was not possible to confirm its applicability of the methodology under study using non-contact sensors.

KEYWORDS

Force identification, Displacement transmissibility, Non-contact sensors, Piezoelectric sensors

ÍNDICE

| | |
|---|-------|
| AGRADECIMENTOS | IX |
| RESUMO | XI |
| ABSTRACT | XIII |
| ÍNDICE | XV |
| ÍNDICE DE FIGURAS | XIX |
| ÍNDICE DE TABELAS | XXIII |
| NOMENCLATURA | XXV |
| Lista de variáveis..... | XXV |
| Operadores | XXVII |
| Abreviaturas | XXVII |
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Enquadramento e Motivação..... | 1 |
| 1.2 Estrutura da Dissertação e Objetivos..... | 3 |
| 1.3 Metodologias Existentes | 5 |
| 1.4 Trabalho de Lage et al..... | 6 |
| 1.4.1 Resumo..... | 6 |
| 1.4.2 Componente Experimental | 7 |
| 1.4.3 Discussão..... | 8 |
| 2. FUNDAMENTOS DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS | 11 |
| 2.1 Introdução | 11 |
| 2.2 Fundamentos básicos de Vibrações Mecânicas..... | 13 |
| 2.2.1 Sistema dinâmico com 1 GDL | 15 |
| 2.2.2 Transmissibilidade de Deslocamentos num sistema com 1 GDL | 17 |
| 2.2.3 Sistema Dinâmico MGD..... | 18 |
| 2.2.4 Frequências Naturais e Modos de Vibração..... | 20 |
| 2.2.5 Análise no domínio do tempo e da frequência | 22 |
| 2.3 Sensores de Aquisição..... | 23 |

| | | |
|-------|---|----|
| 2.3.1 | Sensores Piezoelétricos | 23 |
| 2.3.2 | Sensores de efeito de Hall | 24 |
| 2.3.3 | Sensores Piezoelétricos e Sensores de efeito de Hall | 25 |
| 3 | IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS COM BASE NO CONCEITO DA TRANSMISSIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS EM SISTEMAS MGD L | 27 |
| 3.1 | Transmissibilidade de Deslocamentos num sistema MGD L | 27 |
| 3.2 | Identificação de Forças | 31 |
| 3.3 | Modelo de Elementos Finitos | 33 |
| 3.4 | Simulações Numéricas | 35 |
| 3.4.1 | Forças constantes no domínio da frequência – Simulação 1 | 35 |
| 3.4.2 | Forças constantes no domínio da frequência – Simulação 2 | 39 |
| 3.4.3 | Forças harmónicas no domínio da frequência – Simulação 1 | 42 |
| 3.4.4 | Forças harmónicas no domínio da frequência – Simulação 2 | 44 |
| 4. | PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL, SENSORES DE EFEITO DE HALL | 47 |
| 4.1 | Equipamento e procedimento experimental | 47 |
| 4.1.1 | Sensores de efeito de Hall | 48 |
| 4.1.2 | Ímanes | 49 |
| 4.1.3 | Estrutura de suporte e fixação | 50 |
| 4.1.4 | Calibração dos sensores | 54 |
| 4.2 | Testes de aquisição | 61 |
| 4.2.1 | Teste 1 – Excitação por impulso | 61 |
| 4.2.2 | Teste 2 – Excitação por shaker | 72 |
| 4.3 | Discussão de resultados | 80 |
| 5. | PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL, ACELERÓMETROS PIEZOELÉTRICOS | 83 |
| 5.1 | Equipamento e procedimento experimental | 83 |
| 5.1.1 | Acelerómetros Piezoelétricos | 84 |
| 5.1.2 | Aquisição e tratamento de dados | 84 |
| 5.1.3 | Calibração do equipamento | 86 |
| 5.2 | Testes de aquisição | 88 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 5.2.1 | Teste 1 | 88 |
| 5.3 | Discussão de resultados..... | 98 |
| 6. | CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS | 101 |
| 6.1 | Conclusão..... | 101 |
| 6.2 | Trabalhos futuros..... | 103 |
| | BIBLIOGRAFIA..... | 105 |
| | ANEXO..... | 109 |
| | Anexo I – Erros acumulados da 1. ^a simulação numérica do trabalho realizado por Lage et al. [10] | 109 |
| | Anexo II – Propriedades magnéticas de ímanes..... | 111 |
| | APÊNDICE | 113 |
| | Apêndice I – Erros acumulados, Forças constantes no domínio da frequência | 113 |
| | Apêndice II – Erros acumulados, Forças harmônicas no domínio da frequência | 115 |
| | Apêndice III – Curvas referentes à 1. ^a calibração | 117 |
| | Apêndice IV – Curvas referentes à 2. ^a calibração | 118 |
| | Apêndice V – Curvas referentes à 3. ^a calibração | 119 |
| | Apêndice VI – Aparelhos utilizados no Teste 2 – Excitação por shaker | 120 |
| | Apêndice VII – Comparação de FRFs | 121 |
| | Apêndice VIII – Espectros de deslocamento | 124 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 – Ponte 25 de Abril, adaptado de [3]. | 2 |
| Figura 1.2 – Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, adaptado de [1]. | 2 |
| Figura 1.3 – Corte da turbina a vapor Siemens SST-500 GEO, adaptado de [4]. | 3 |
| Figura 1.4 – Montagem experimental de uma viga com uma força aplicada, retirado de [10]. | 7 |
| Figura 1.5 – Força medida na coordenada 13, retirado de [10]. | 7 |
| Figura 1.6 – Erro acumulado em frequência para cada combinação de forças, retirado de [10]. | 8 |
| Figura 1.7 – Comparação da força medida e reconstruída na coordenada 13, retirado de [10]. | 8 |
| Figura 2.1 – Torre de Shanghai, adaptado de [22]. | 12 |
| Figura 2.2 – Sistema vibratório massa-mola-amortecedor. | 13 |
| Figura 2.3 – Sistema Vibratório com múltiplos graus de liberdade, retirado de [16]. | 14 |
| Figura 2.4 – Sistema massa-mola-amortecedor com excitação harmónica na base. | 17 |
| Figura 2.5 – Elemento barra-viga com 6 graus de liberdade, adaptado de [24]. | 19 |
| Figura 2.6 – Quatro primeiros modos de vibração de uma viga, retirado de [25]. | 22 |
| Figura 2.7 – Esquema de um acelerómetro piezoelétrico, retirado de [26]. | 24 |
| Figura 2.8 – Princípio de funcionamento do efeito Hall, retirado de [27]. | 25 |
| Figura 2.9 – Sensor de efeito Hall (à esquerda) e acelerómetro piezoelétrico (à direita). | 26 |
| Figura 3.1 – Conjuntos de coordenadas #A, #U, #K e #C de uma estrutura em condição livre-livre, retirado de [9]. | 28 |
| Figura 3.2 – Matriz receptância em função da frequência ω , adaptado de [28]. | 30 |
| Figura 3.3 – Função de resposta em frequência H_j, k . | 31 |
| Figura 3.4 – Esquema do algoritmo utilizado na localização e quantificação de forças. | 32 |
| Figura 3.5 – Aspeto esquemático da viga decomposta em 16 elementos, adaptado de [10]. | 34 |
| Figura 3.6 – Viga composta por 16 elementos. | 35 |
| Figura 3.7 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 1.º caso. | 36 |
| Figura 3.8 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=2 e #U=2. | 37 |
| Figura 3.9 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 2.º caso. | 37 |
| Figura 3.10 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=3 e #U=2. | 38 |
| Figura 3.11 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=2 e #U=3. | 39 |
| Figura 3.12 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 1.º caso. | 40 |
| Figura 3.13 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 2.º caso. | 41 |
| Figura 3.14 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 3.º caso. | 41 |
| Figura 3.15 – Respostas medidas na viga, estando esta a suportar uma força estática e outra dinâmica. | 42 |
| Figura 3.16 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=2 e #U=2. | 43 |

| | |
|---|----|
| Figura 3.17 – Respostas medidas na viga, estando esta a suportar duas forças dinâmicas. | 44 |
| Figura 3.18 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=2$ e $\#U=3$ | 45 |
| Figura 3.19 – Fluxograma de todos os casos realizados, para cada simulação. | 46 |
| Figura 4.1 – Composição do sensor de efeito de Hall SS49E, adaptado de [29]. | 48 |
| Figura 4.2 – Ímanes de neodímio. | 50 |
| Figura 4.3 – Viga sob condições livre-livre. | 50 |
| Figura 4.4 – Vista da estrutura, utilizando software CAD. | 51 |
| Figura 4.5 – Dimensões do perfil Bosch, adaptado de [30]. | 51 |
| Figura 4.6 – Cantos, parafusos e porcas de fixação. | 51 |
| Figura 4.7 – Utilização de uma serra elétrica no corte do perfil de alumínio.. | 52 |
| Figura 4.8 – Estrutura de suporte aos sensores. | 52 |
| Figura 4.9 – Vista CAD do suporte do sensor..... | 53 |
| Figura 4.10 – Impressão 3D do suporte. | 53 |
| Figura 4.11 – Fixação do suporte dos sensores à estrutura. | 53 |
| Figura 4.12 – Instrumentação de um sensor para efeito de calibração..... | 54 |
| Figura 4.13 – Instrumentação de um sensor..... | 55 |
| Figura 4.14 – 1. ^a calibração, setup experimental utilizando ímanes do tipo 2. | 55 |
| Figura 4.15 – 1. ^a calibração, vista pormenorizada. | 56 |
| Figura 4.16 – Curva de calibração, íman tipo 2. | 57 |
| Figura 4.17 – 2. ^a calibração, íman do tipo 1..... | 58 |
| Figura 4.18 – Curva de calibração, íman tipo 1. | 59 |
| Figura 4.19 – Ligações em Y à fonte de tensão. | 60 |
| Figura 4.20 – 3. ^a calibração, setup experimental utilizando ímanes do tipo 1. | 60 |
| Figura 4.21 – 3. ^a calibração, vista detalhada. | 61 |
| Figura 4.22 – Sequência de operações, Teste 1..... | 62 |
| Figura 4.23 – Ilustração da viga submetida a uma excitação por impulso no nó 13, medindo 4 respostas dinâmicas..... | 62 |
| Figura 4.24 – Montagem experimental, Teste 1..... | 63 |
| Figura 4.25 – Espetro do deslocamento no nó 5. | 64 |
| Figura 4.26 – Espetro do deslocamento no nó 7. | 64 |
| Figura 4.27 – Espetro do deslocamento no nó 11. | 65 |
| Figura 4.28 – Espetro do deslocamento no nó 15. | 65 |
| Figura 4.29 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=2$ e $\#U=2$ | 66 |
| Figura 4.30 – Comparação entre a força real aplicada no nó 13 e a reconstruída no nó 9. | 68 |
| Figura 4.31 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=3$ e $\#U=1$ | 69 |
| Figura 4.32 – Forças reconstruídas nos nós 2 e 17..... | 70 |
| Figura 4.33 – Comparação entre a força real aplicada no nó 13 e a reconstruída no nó 2. | 71 |

| | |
|--|-----|
| Figura 4.34 – Comparação entre a força real aplicada no nó 13 e a reconstruída no nó 17..... | 71 |
| Figura 4.35 – Sequência de Operações, Teste 2..... | 72 |
| Figura 4.36 – Ilustração da viga submetida a uma excitação sinusoidal no nó 8, medindo 4 respostas dinâmicas..... | 73 |
| Figura 4.37 – Montagem experimental, Teste 2..... | 73 |
| Figura 4.38 – Espectro do deslocamento no nó 5. | 74 |
| Figura 4.39 – Espectro do deslocamento no nó 7. | 74 |
| Figura 4.40 – Espectro do deslocamento no nó 11. | 75 |
| Figura 4.41 – Espectro do deslocamento no nó 15. | 75 |
| Figura 4.42 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=2 e #U=2..... | 76 |
| Figura 4.43 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=3 e #U=1..... | 78 |
| Figura 4.44 – Fluxograma de todos os casos realizados, para cada Teste..... | 79 |
| Figura 5.1 – Acelerómetro piezoelétrico, características gerais..... | 84 |
| Figura 5.2 – Prosig P8012, hardware de aquisição. | 85 |
| Figura 5.3 – Espectro da força real aplicada no nó 10. | 86 |
| Figura 5.4 – Esquema do setup experimental relativo à calibração. | 87 |
| Figura 5.5 – Sequência de operações, Teste 1..... | 88 |
| Figura 5.6 – Funções de resposta em frequência $H_{5,10}$, experimental e numérica antes da atualização..... | 89 |
| Figura 5.7 – Funções de resposta em frequência $H_{5,10}$, experimental e numérica atualizada... | 90 |
| Figura 5.8 – Ilustração da viga submetida a uma excitação por impacto no nó 10, medindo 4 respostas dinâmicas..... | 90 |
| Figura 5.9 – Montagem experimental, Teste 1..... | 91 |
| Figura 5.10 – Espectro do deslocamento no nó 5. | 92 |
| Figura 5.11 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=1 e #U=3..... | 93 |
| Figura 5.12 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=2 e #U=2..... | 94 |
| Figura 5.13 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=3 e #U=1..... | 95 |
| Figura 5.14 – Comparação entre a força real e reconstruída no nó 10, antes da atualização do modelo numérico..... | 96 |
| Figura 5.15 – Comparação entre a força real e reconstruída no nó 10, após a atualização do modelo numérico..... | 97 |
| Figura Anexo.1 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=2 e #U=2, retirado de [10]. | 109 |
| Figura Anexo.2 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=3 e #U=2, retirado de [10]. | 110 |
| Figura Anexo.3 – Propriedades magnéticas de ímanes de neodímio consoante o grau, retirado de [36]. | 111 |

| | |
|--|-----|
| Figura Apêndice.1 – Erro acumulado para cada combinação do 1.o caso – #K=4 e #U=1. | 113 |
| Figura Apêndice.2 – Erro acumulado para cada combinação 2.º caso – #K=4 e #U=2. | 114 |
| Figura Apêndice.3 – Erro acumulado para cada combinação do 3.º caso – #K=4 e #U=3. | 114 |
| Figura Apêndice.4 – Erro acumulado para cada combinação do 2.º caso – #K=3 e #U=1. | 115 |
| Figura Apêndice.5 – Erro acumulado para cada combinação do 3.º caso – #K=2 e #U=3. | 115 |
| Figura Apêndice.6 – Erro acumulado para cada combinação do 3.º caso – #K=2 e #U=2. | 116 |
| Figura Apêndice.7 – Erro acumulado para cada combinação do 2.º caso – #K=3 e #U=2. | 116 |
| Figura Apêndice.8 – Curvas de calibração, ímanes tipo 2 – 1.ª calibração. | 117 |
| Figura Apêndice.9 – Curvas de calibração, ímanes tipo 2 – 1.ª calibração. | 117 |
| Figura Apêndice.10 – Curvas de calibração, ímanes tipo 1 – 2.ª calibração. | 118 |
| Figura Apêndice.11 – Curvas de calibração, ímanes tipo 1 – 2.ª calibração. | 118 |
| Figura Apêndice.12 – Curvas de calibração, ímanes tipo 1 – 3.ª calibração. | 119 |
| Figura Apêndice.13 – Gerador de sinais. | 120 |
| Figura Apêndice.14 – Frequencímetro de sinal. | 120 |
| Figura Apêndice.15 – Amplificador de sinal. | 120 |
| Figura Apêndice.16 – Funções de resposta em frequência $H_{7,10}$, experimental e numérica antes da atualização. | 121 |
| Figura Apêndice.17 – Funções de resposta em frequência $H_{7,10}$, experimental e numérica atualizada. | 121 |
| Figura Apêndice.18 – Funções de resposta em frequência $H_{11,10}$, numérica e experimental, antes da atualização. | 122 |
| Figura Apêndice.19 – Funções de resposta em frequência $H_{11,10}$, numérica e experimental atualizada. | 122 |
| Figura Apêndice.20 – Funções de resposta em frequência $H_{15,10}$, experimental e numérica antes da atualização. | 123 |
| Figura Apêndice.21 – Funções de resposta em frequência $H_{15,10}$, experimental e numérica atualizada. | 123 |
| Figura Apêndice.22 – Espectro do deslocamento no nó 7. | 124 |
| Figura Apêndice.23 – Espectro de deslocamento no nó 11. | 124 |
| Figura Apêndice.24 – Espectro do deslocamento no nó 15. | 125 |

ÍNDICE DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 3.1 – Propriedades da viga. | 34 |
| Tabela 3.2 – Combinação com o erro mínimo absoluto, 1.º caso. | 40 |
| Tabela 3.3 – Combinação com o erro mínimo absoluto, 2.º caso. | 41 |
| Tabela 3.4 – Combinação com o erro mínimo absoluto, 3.º caso. | 42 |
| Tabela 3.5 – Combinação com o erro mínimo absoluto..... | 43 |
| Tabela 3.6 – Combinação com o erro mínimo absoluto..... | 45 |
| Tabela 4.1 – Descrição do sensor de efeito de Hall SS49E, adaptado de [29]...... | 48 |
| Tabela 4.2 – Características gerais do sensor à temperatura ambiente (25 °C), adaptado de [29]. | 49 |
| Tabela 4.3 – Combinações com os menores erros, 1.º caso. | 67 |
| Tabela 4.4 – Combinações com os menores erros, 2.º caso. | 69 |
| Tabela 4.5 – Combinações com os menores erros, 1.º caso. | 77 |
| Tabela 4.6 – Combinações com os menores erros, 2.º caso. | 78 |
| Tabela 5.1 – Combinações com os menores erros, 2.º caso. | 94 |
| Tabela 5.2 – Combinações com os menores erros, 3.º caso. | 95 |

NOMENCLATURA

Lista de variáveis

| | |
|----------------------|--|
| A | Área |
| C | Amortecimento viscoso |
| C_c | Amortecimento crítico |
| \mathbf{C} | Matriz de amortecimento |
| $d_1(V)$ | Distância em função da tensão de Hall, ímanes tipo 1 |
| $d_2(V)$ | Distância em função da tensão de Hall, ímanes tipo 2 |
| E | Módulo de Young |
| <i>Erro</i> | Erro acumulado |
| $f(t)$ | Força no tempo |
| F | Amplitude da força |
| \mathbf{F} | Vetor de amplitude de forças |
| $\tilde{\mathbf{F}}$ | Vetor de amplitude de forças medido |
| G | Amplitude de força equivalente |
| $H(\omega)$ | Receptância |
| \mathbf{H} | Matriz de receptância |
| $\tilde{\mathbf{H}}$ | Matriz de receptância medida |
| \mathbf{H}_y | Sub-matriz de receptância do grau de liberdade y |
| i | Constante imaginária |
| I | Segundo momento de área |
| j, k | Índices de direção |
| K | Rigidez |
| \mathbf{K} | Matriz de rigidez |
| \mathbf{K}_g | Matriz de rigidez global |
| \mathbf{K}_l | Matriz de rigidez local |
| $\#K, \#U, \#A, \#C$ | Conjuntos de coordenadas |
| L | Comprimento |
| M | Massa |
| \mathbf{M} | Matriz de massa |
| \mathbf{M}_g | Matriz de massa global |
| \mathbf{M}_l | Matriz de massa local |

| | |
|----------------------|--|
| $Q(\omega)$ | Impedância mecânica |
| r | Razão entre frequências |
| $S(\omega)$ | Massa aparente |
| t | Tempo |
| \mathbf{T}_{lg} | Matriz transformação de coordenadas |
| $T^{(d)}$ | Transmissibilidade de deslocamentos elementar |
| $\mathbf{T}^{(d)}$ | Matriz de transmissibilidade de deslocamentos |
| x, y | Deslocamento |
| x_h e x_p | Soluções homogénea e particular |
| \dot{x}, \dot{y} | Velocidade |
| \ddot{x}, \ddot{y} | Aceleração |
| X, Y | Amplitude de deslocamento |
| \bar{X} | Amplitude de deslocamento complexa |
| X_h e X_p | Amplitude de deslocamento das soluções homogénea e particular |
| \mathbf{X} | Vetores de deslocamento |
| \mathbf{Y} | Vetor de amplitude de deslocamento |
| $\tilde{\mathbf{Y}}$ | Vetor de amplitude de deslocamento medido |
| $Z(\omega)$ | Rigidez dinâmica |
| \mathbf{Z} | Matriz de rigidez dinâmica |
| $\alpha(\omega)$ | Acelerância |
| β | Coefficiente de proporcionalidade de amortecimento relativo à matriz massa |
| $\gamma(\omega)$ | Mobilidade |
| ς | Ângulo entre o referencial global e local |
| ξ | Fator de amortecimento |
| ρ | Massa específica |
| ϱ | Coefficiente de proporcionalidade de amortecimento relativo à matriz rigidez |
| ϕ | Ângulo de fase |
| ϕ_1 | Ângulo de fase da resposta homogénea |
| ϕ_2 | Ângulo de fase da resposta particular |
| ϕ_3 | Ângulo de fase entre as amplitudes de deslocamento X e Y |
| Ψ | Vetores próprios |
| ω_a | Frequência natural amortecida |
| ω_f | Frequência forçada |
| ω_n | Frequência natural não amortecida |
| ω_n^2 | Matriz de valores próprios |

Operadores

| | |
|--------------|-----------------------|
| $[\]^T$ | Matriz transposta |
| $[\]^+$ | Matriz pseudo-inversa |
| $[\]^{-1}$ | Matriz inversa |
| $\{ \ }^T$ | Vetor transposto |

Abreviaturas

| | |
|--------|---|
| CSAC | <i>Cross Signature Assurance Criterion</i> |
| CSC | <i>Cross Signature Correlation</i> |
| CSF | <i>Cross Signature Scale Factor</i> |
| FRF | Função de Resposta em Frequência |
| GDL | Grau de Liberdade |
| Matlab | <i>Matrix Laboratory, software</i> da MathWorks |
| MGDL | Múltiplos Graus de Liberdade |
| MEF | Método de Elementos Finitos |
| TR | Transmissibilidade |

1. INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento e Motivação

A engenharia mecânica é um dos pilares que mais contribui para a evolução do Homem. Ela engloba áreas essenciais para satisfazer as nossas necessidades e ambições, onde se dá especial atenção às energias, à produção, à mecânica estrutural, todas elas interferindo direta ou indiretamente nas nossas vidas. Tudo o que vemos à nossa volta foi fruto de um projeto, de um processo de fabrico, da confeção de um produto, da Indústria.

Até aos dias de hoje, o Homem evoluiu com base em duas premissas: a eficácia de fazer algo e a sua eficiência. É com base nestas premissas que se começa a construir este documento, pois, atualmente, ambas vão ao encontro da automatização de processos. Cada vez mais a máquina está a substituir a mão-de-obra e a revolução industrial deixou de ser um marco e passou a ser um requisito. Mas, tal como o Homem, a máquina também falha e estas falhas derivam maioritariamente de causas operacionais (desgaste, corrosão), incorreções na fase de projeto ou defeitos do material [1].

Quando uma estrutura, seja ela qual for, deixa de funcionar como previsto/projetado, normalmente está associado à existência de falhas no seu sistema ou perturbações provenientes do exterior. Estas ações propagam-se pela estrutura, exigindo assim a sua monitorização e manutenção. Aqui, levanta-se um grande problema na área da Engenharia: como localizar, quantificar e qualificar estas perturbações.

É na área das vibrações mecânicas que o estudo da resposta dinâmica de estruturas pode resolver o problema em causa, localizando forças que perturbam um sistema e calcular a sua magnitude. Um exemplo prático e simples deste problema pode ser encontrado no trabalho de Lourens *et al.* [2]. A identificação de forças numa estrutura lida com a reconstrução de forças dinâmicas desconhecidas a partir da sua resposta, utilizando um modelo de análise do sistema e

um número limitado de sensores. Assim, existe uma necessidade de localizar as forças, utilizando uma abordagem inversa, isto é, a partir da resposta do sistema tenta-se chegar às fontes de excitação, pois a medição direta destas forças é, normalmente, muito difícil ou impossível.

O problema da identificação de forças pode, por exemplo, ser encontrado quando se pretende determinar carregamentos dinâmicos causados por veículos em pontes (Figura 1.1); na determinação de carregamentos dinâmicos em grandes estruturas, causados pelo vento; entre outros.



Figura 1.1 – Ponte 25 de Abril, adaptado de [3].

De modo a contextualizar e facilitar a compreensão do problema em questão, utilizemos outra área onde esta ótica é fortemente abordada: a equilibragem dinâmica de rotores.

Os processos de equilibragem dinâmica foram projetados de modo a corrigir o desequilíbrio de um sistema, provocado pela distribuição não uniforme de massa num rotor. Neste caso, devido ao desequilíbrio do sistema, o rotor deixa de funcionar conforme foi projetado e transmite vibrações indesejadas aos seus apoios, podendo levar à falha do sistema. É possível visualizar o esboço de um teste de equilibragem de um corpo rígido, observando a Figura 1.2.

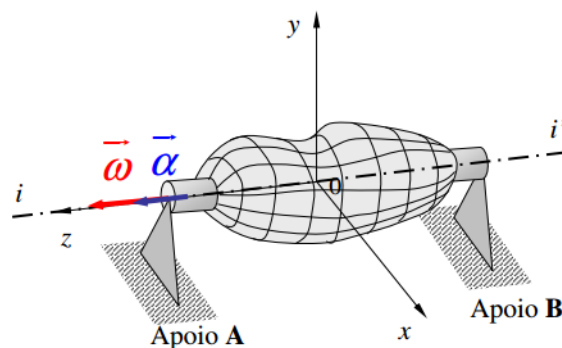


Figura 1.2 – Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, adaptado de [1].

Se tomarmos como exemplo a turbina a vapor na Figura 1.3 ou um compressor de um motor a jato, o processo de equilibragem dinâmica é uma operação morosa e dispendiosa, pois é necessário retirar o rotor, realizar os testes de equilibragem e, conseqüentemente, realizar a calibração. Não só é moroso e dispendioso, como pode ser pouco prático, isto é, a introdução de sensores incumbidos de registrar as vibrações provenientes da resposta dinâmica do sistema pode ser limitada, bem como a acessibilidade da estrutura [3].

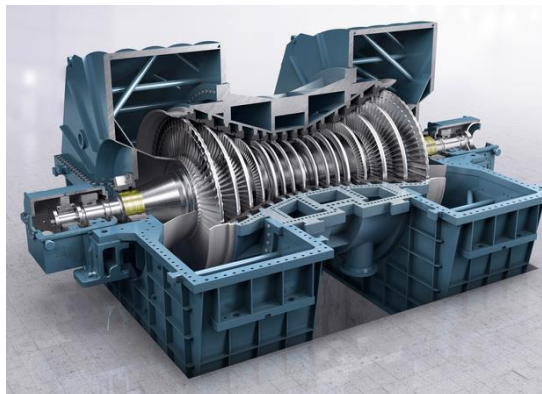


Figura 1.3 – Corte da turbina a vapor Siemens SST-500 GEO, adaptado de [4].

Assim, o problema de identificação de forças é bastante cativante, pois leva-nos a desenvolver métodos que permitem que, a partir de locais acessíveis, seja possível a identificação de forças responsáveis por perturbações num sistema, tendo em mente a avaliação e manutenção de estruturas.

Foram realizados vários estudos nesta área, potenciando assim a criação de modelos que identificam forças com base em conceitos diversificados tais como modelos de previsão baseados na propagação de ondas [5], previsão de forças em pratos para sistemas com propriedades dependentes do tempo [6], entre outros.

Esta dissertação estuda a identificação de forças com base no conceito da transmissibilidade [7] para sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade [8].

1.2 Estrutura da Dissertação e Objetivos

Na presente Dissertação, é estudada uma solução ao problema da identificação de forças com base no conceito da transmissibilidade, mais especificamente, na transmissibilidade de deslocamentos numa estrutura [9]. Este método foi apresentado pela primeira vez por Lage *et al.* [10] e pretende-se nesta dissertação, continuar o seu trabalho, variando alguns parâmetros experimentais, dos quais o principal é o tipo de sensores a utilizar na obtenção da resposta

dinâmica de uma estrutura. Neste caso, serão considerados sensores de efeito de Hall, sensores não contacto que permitem a medição direta do deslocamento.

A metodologia de resolução do problema foi discutida e escolhida por diversos motivos. Para além de ser uma perspetiva bastante interessante de abordar o problema em questão, este método existe e já foi testado dentro do grupo de Investigação, onde se inserem os orientadores desta dissertação.

A contribuição que se espera desta dissertação foca-se no tipo de medição da transmissibilidade de deslocamentos. Os sensores de efeito de Hall possibilitam uma leitura direta de deslocamentos no sistema, não estando em contacto com a estrutura, contrariamente aos acelerómetros utilizados em trabalhos já citados. Isto contrasta com o trabalho já existente, na medida em que, com os sensores de efeito de Hall pretende-se medir a resposta de uma estrutura com sensores não-contacto, por uma fração do preço dos convencionais acelerómetros piezoelétricos.

O presente documento começa por uma revisão bibliográfica, seguindo-se os fundamentos das vibrações mecânicas, a descrição e compreensão do conceito de transmissibilidade para sistemas com um grau de liberdade – 1 GDL e múltiplos graus de liberdade – MGD, a metodologia utilizada na identificação de forças, um procedimento experimental referente aos sensores de efeito de Hall e um procedimento experimental utilizando sensores acelerómetros piezoelétricos. Assim sendo, apresentam-se os objetivos propostos para esta dissertação:

- Contextualizar e construir de um modelo numérico, utilizando o Método de Elementos Finitos – MEF, para caracterizar a estrutura em estudo;
- Criar algoritmos que permitam lidar com o problema da localização e quantificação de forças;
- Criar a plataforma de aquisição de dados experimentais;
- Construir o modelo experimental em laboratório;
- Testar a aquisição de dados e calibrar os sensores a utilizar no 1.º procedimento experimental deste projeto (sensores de efeito de Hall);
- Testar aquisições através dos sensores a utilizar no 2.º procedimento experimental deste projeto (sensores piezoelétricos);

- Realização de testes na estrutura e posterior análise de resultados, de modo a validar o método teórico implementado.

1.3 Metodologias Existentes

Nesta secção, pretende-se apresentar o resultado da pesquisa bibliográfica relacionado com o tema desta dissertação. Serão apresentadas metodologias de vários investigadores, dando especial atenção ao trabalho realizado por Lage *et al.* [10] na área da identificação de forças com base no conceito de transmissibilidade de deslocamentos, sendo este o ponto de partida deste projeto de dissertação.

Em inúmeros casos, a medição direta de forças de excitação que atuem um sistema é impossível, seja por inacessibilidade na estrutura, seja pela impossibilidade de instalar sensores de aquisição, entre outros. Assim, existe a necessidade de criar metodologias por forma a obter estas forças de perturbação, considerando a resposta da estrutura. Esta abordagem é conhecida na literatura como uma abordagem inversa ao problema que, normalmente, é mal colocado pois não satisfaz as condições de Hadamard¹, e mal condicionado pela possível existência de propagação de erro proveniente de ruído.

Existem diversos trabalhos publicados que demonstram métodos para identificar forças num sistema. É possível encontrar estudos sobre a identificação de forças de impacto [5], previsão de forças em pratos para sistemas com propriedades dependentes do tempo [6], identificação de forças de impacto utilizando o método pseudo-inverso [11], a determinação de forças de impacto não conhecidas [12], identificação de forças dinâmicas no domínio da frequência [13], entre outros.

Uma das maneiras de abordar este problema é a utilização do conceito da transmissibilidade. Este conceito e muitos outros, necessários à compreensão fundamental de vibrações mecânicas, são apresentados, na maior parte da literatura clássica de vibrações, [14–17]. A transmissibilidade de deslocamentos utilizada neste projeto é calculada para sistemas MGD. De acordo com alguns trabalhos publicados [7–10], é possível hoje fundamentar de maneira sólida este conceito, que tão importante é na caracterização e modelação de sistemas dinâmicos, e utilizá-lo numa gama de aplicações necessárias à engenharia, tais como: a deteção e quantificação de dano [18]; a obtenção do modelo de resposta de uma estrutura; o ajustamento do MEF a partir de dados experimentais, utilizando uma metodologia com base no conceito de

¹ A solução do problema existe, é única e estável [37].

transmissibilidade [19]; e ainda o estudo das matrizes de transmissibilidade na equilibragem de rotores [20].

A generalização da transmissibilidade de deslocamentos de Maia *et al.* [7] é o conceito utilizado para descrever a transmissibilidade em sistemas MGD, sendo esta uma das vias que ajuda na localização, quantificação e reconstrução de forças de excitação externas a um sistema. Este método é pela primeira vez apresentado por Lage *et al.* [10] e, juntamente com a abordagem inversa ao problema na identificação de forças, constitui o alicerce desta dissertação.

A transmissibilidade de deslocamentos estabelece a relação entre um conjunto de respostas desconhecidas, a partir de algumas respostas conhecidas, com o intuito de se conseguir identificar forças dinâmicas aplicadas a uma estrutura, associadas a essas mesmas respostas.

1.4 Trabalho de Lage *et al.*

A metodologia utilizada na identificação de forças com base no conceito de Transmissibilidade foi apresentada pela 1.^a vez por Yoan Lage e centra-se na Localização/Quantificação e Reconstrução de forças aplicadas a uma viga sob condição livre-livre. Resumidamente, recorrendo à utilização de sensores que medem deslocamentos de uma viga suspensa, essas respostas são processadas num algoritmo que Localiza/Identifica as forças aplicadas e reconstrói o vetor carregamento. Nesta secção é possível analisar resumidamente este trabalho e compará-lo ao que se pretende neste projeto de dissertação.

1.4.1 Resumo

Em [10], Lage *et al.* propõem um método de identificação de forças aplicadas a uma viga na condição livre-livre, utilizando o conceito da transmissibilidade de deslocamentos. Este método divide-se em dois passos: o primeiro consiste em quantificar o número de forças e a sua localização, utilizando um algoritmo de “localização e quantificação”, baseado no conceito da transmissibilidade de respostas dinâmicas; o segundo passo consiste na reconstrução do vetor carregamento. Na “localização e quantificação” de forças, é utilizado um modelo [7] para descrever a relação de transmissibilidades em sistemas MGD. Posteriormente, é utilizada a matriz de receptância e as respostas dinâmicas da estrutura para reconstruir o vetor carregamento. O modelo de resposta da estrutura é obtido por um modelo de elementos finitos, de modo a verificar o método de localização e quantificação em estudo. Segue-se uma componente experimental, onde são obtidas respostas dinâmicas da estrutura, e com o modelo de resposta computacional, localiza-se, quantifica-se e reconstrói-se os carregamentos aplicados ao sistema.

No decorrer do documento, são explicados detalhadamente todos os conceitos e noções necessárias à compreensão da metodologia em estudo.

1.4.2 Componente Experimental

Pretende-se relatar a experiência laboratorial realizada, demonstrando assim a eficácia do método em estudo.

Na Figura 1.4, é possível observar a montagem experimental, onde é enviado um sinal ao agitador eletromecânico (*Shaker*) que, se dividirmos a viga em 16 elementos /secções (17 nós), está ligado à viga no nó 13. Através da interação entre o agitador e a viga, é possível obter efetivamente a magnitude da força aplicada no nó 13 (Figura 1.5), podendo depois compará-la com a força reconstruída. São escolhidas as coordenadas onde se posicionam os acelerómetros piezoelétricos (sensores): 5, 7, 11 e 15.

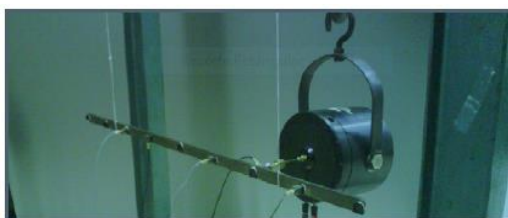


Figura 1.4 – Montagem experimental de uma viga com uma força aplicada, retirado de [10].

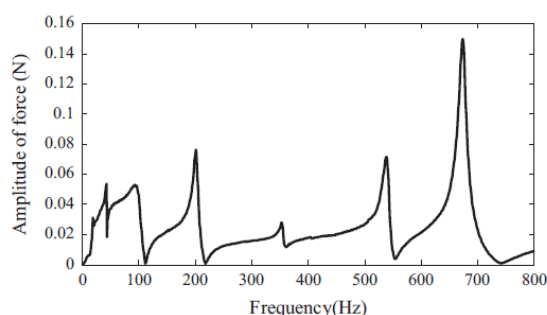


Figura 1.5 – Força medida na coordenada 13, retirado de [10].

Seguidamente, o algoritmo projetado identifica a coordenada 13 como sendo a posição onde está a ser exercida a força. É possível observar na Figura 1.6 o erro acumulado associado a todas as combinações de forças, identificando a combinação que contém a posição da força aplicada. A combinação com um erro mínimo absoluto corresponde à combinação número 13, que está correta visto que esta combinação representa a força aplicada na coordenada 13.

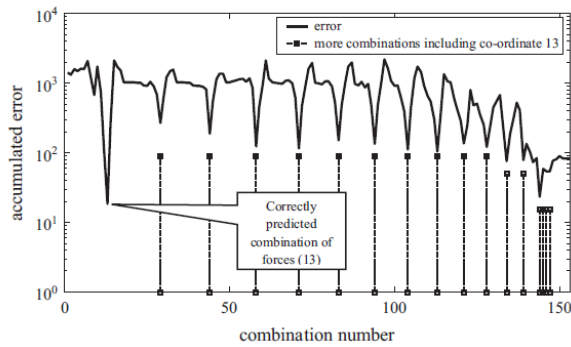


Figura 1.6 – Erro acumulado em frequência para cada combinação de forças, retirado de [10].

Uma vez feita a localização e quantificação de forças, a reconstrução é feita a partir de cálculo, utilizando as medições efetuadas pelos acelerómetros e os elementos da matriz de receptância correspondentes, relacionando as coordenadas dos acelerómetros com a localização da força. Na Figura 1.7, é possível comparar a amplitude da força experimental com a reconstruída.

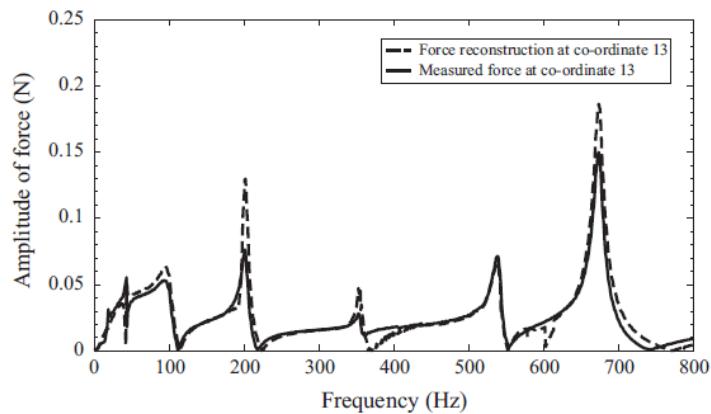


Figura 1.7 – Comparação da força medida e reconstruída na coordenada 13, retirado de [10].

1.4.3 Discussão

Confirma-se que foi possível localizar, quantificar e reconstruir as forças aplicadas à estrutura. No entanto, é possível observar alguns erros na reconstrução do vetor carregamento, comparativamente à força medida. Isto pode ser consequência da adaptação do modelo numérico à estrutura, identificando assim uma limitação neste método.

Como referido na secção Estrutura da Dissertação e Objetivos, com a substituição dos acelerómetros pelos sensores de efeito de Hall, espera-se obter uma boa leitura na resposta dinâmica da estrutura, tirando partido do facto destes sensores não estarem em contacto com a

estrutura em estudo e, assim, contribuir no avanço da identificação de forças com base no conceito de transmissibilidade.

2. FUNDAMENTOS DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS

2.1 Introdução

Esta secção tem como objetivo servir de base à interpretação do presente documento, enunciando os conceitos básicos das vibrações mecânicas em sistemas com 1 GDL e MGD, tais como: sistemas amortecidos e não-amortecidos; os modelos espacial, modal e de resposta; o conceito de transmissibilidade de deslocamentos em sistemas com 1 GDL; frequências naturais e modos de vibração de uma estrutura; método dos elementos finitos; análise no domínio do tempo e da frequência; e, ainda, uma breve introdução aos sensores de aquisição.

A vibração mecânica pode ser definida como sendo o movimento de uma partícula, de um corpo ou de um sistema que oscila em torno da sua posição de equilíbrio. Depois de ter sido deslocado, o sistema tende a voltar à sua posição de equilíbrio devido à ação de forças de restituição. No entanto, na maioria dos casos, o sistema tende a passar o seu ponto de repouso – à repetição deste processo chama-se movimento oscilatório. Eis algumas das propriedades físicas de um movimento oscilatório:

- Período de vibração: é o intervalo de tempo necessário para o sistema completar um ciclo do seu movimento;
- Frequência: é o número de ciclos de movimento por unidade de tempo;
- Amplitude: é o deslocamento máximo do sistema medido a partir da sua posição de equilíbrio.

O fenómeno da vibração mecânica pode ser descrito por equações dinâmicas e, com a sua modelação, foi possível contribuir ao longo dos anos para a evolução tecnológica, nomeadamente na área da dinâmica estrutural. Esta modelação pode ser chamada de análise dinâmica e

proporciona a projeção de soluções mais eficazes, permitindo, por exemplo, estruturas mais leves suportarem carregamentos mais elevados.

O avanço tecnológico acima enunciado só foi possível devido a uma das ferramentas mais utilizadas na engenharia nos dias de hoje: o computador. Os conceitos de computação e algoritmo, criados por Alan Turing, surgiram no século XX e vêm auxiliando a engenharia desde então [21]. Com a capacidade de criar e simular modelos dinâmicos computacionais com fiabilidade e, ainda, desenvolver ferramentas que ajudam a análise de modelos reais, a computação é indispensável na área das vibrações mecânicas, quer pela sua eficiência quer pela rapidez na obtenção de resultados. Uma das mais poderosas ferramentas que a computação oferece à engenharia, e que será utilizada neste projeto, é a modelação de sistemas dinâmicos pelo MEF. Com o MEF é possível aproximar a resposta estrutural através de modelos teóricos bastante próximos da realidade, sendo este um ponto de bastante interesse, pois permite simular meios contínuos.

As vibrações mecânicas sempre foram alvo de estudo, tendo devido à projeção de instrumentos necessários no âmbito da engenharia, como ao desenvolvimento de modelos capazes de estudar estruturas e verificar a sua eficácia e segurança, entre outros. A Torre de Shanghai é um dos vários exemplos onde se pode contemplar o avanço da engenharia utilizando a computação, tendo sempre como primeiro requisito a sua segurança.



Figura 2.1 – Torre de Shanghai, adaptado de [22].

Concluída em 2015, a Torre de Shanghai é o quarto maior arranha-céus do Mundo, com 632 metros. Em [23] é possível ler alguns aspetos fundamentais deste projeto no âmbito do carregamento do vento sobre a estrutura, nomeadamente a otimização aerodinâmica da estrutura, o carregamento dinâmico do vento, o *design* imposto face às condições climáticas, entre outros.

Estes são só alguns dos muitos parâmetros necessários de avaliar para que seja possível conceber o *design* deste arranha-céus.

2.2 Fundamentos básicos de Vibrações Mecânicas

Qualquer sistema com 1 GDL pode ser caracterizado a partir de três componentes:

1. Mola – Armazena ou fornece energia potencial e é responsável pelas forças de restituição do sistema;
2. Amortecedor – É responsável por dissipar energia e é responsável pelas forças dissipativas do sistema;
3. Massa – Armazena ou fornece energia cinética e é responsável pelas forças de inércia do sistema.

Estes três componentes estão sempre presentes num sistema vibratório. Note-se que nem sempre é necessário ter fisicamente uma mola ou amortecedor, isto é, o sistema pode apresentar só por si características que promovem respetivamente a elasticidade e o amortecimento no movimento oscilatório, como por exemplo uma viga. Na Figura 2.2, é possível observar a representação esquemática de um sistema composto pelos três componentes mencionados anteriormente.

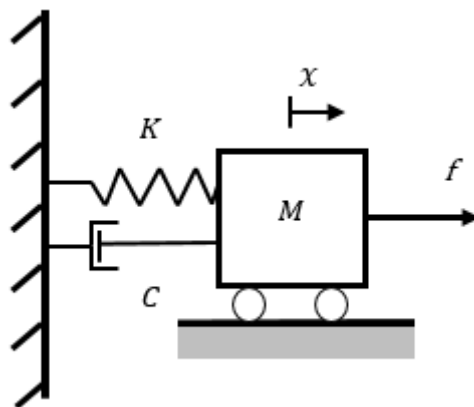


Figura 2.2 – Sistema vibratório massa-mola-amortecedor.

Na Figura 2.2, M , C e K , representam respetivamente a massa, o amortecimento viscoso e a rigidez. Já f e x representam, respetivamente, a força aplicada e o deslocamento da massa.

Os GDL definem-se como sendo o número de coordenadas independentes necessárias para definir a posição do sistema em qualquer instante de tempo. No caso da Figura 2.2, o sistema

denomina-se por massa-mola-amortecedor e é composto por 1 GDL, pelo que é apenas necessária uma coordenada x para definir a posição do sistema em qualquer instante do tempo. Mas este é apenas o caso mais simples concebível, pois os casos de estudo que interessam à Engenharia são sistemas mais complexos, com MGD.

Se observarmos a Figura 2.3, repara-se que são necessárias seis coordenadas independentes x_i , que correspondem aos deslocamentos das diferentes massas, para definir a posição do sistema em qualquer instante do tempo.

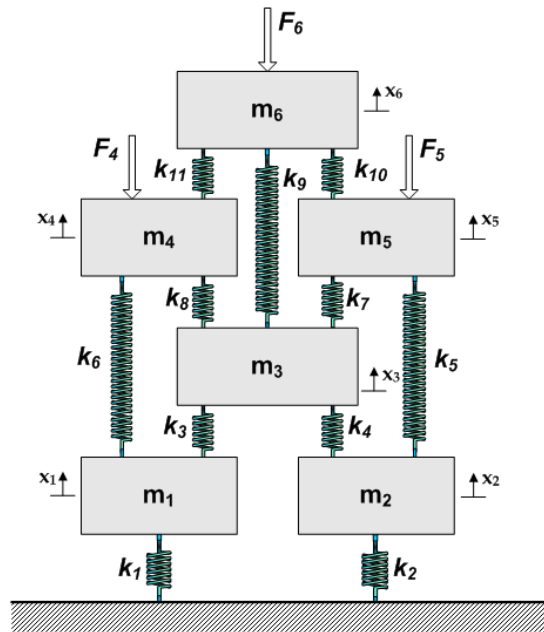


Figura 2.3 – Sistema Vibratório com múltiplos graus de liberdade, retirado de [16].

Um dos critérios obrigatórios para classificar uma vibração é a definição de uma vibração livre e de uma vibração forçada. Numa vibração livre, o sistema sofre uma perturbação inicial e continua a vibrar livremente, pelo que o seu movimento oscilatório é apenas atenuado no caso de o sistema ser amortecido. Numa vibração forçada, o sistema é atuado por forças exteriores, e o seu movimento oscilatório também pode ser atenuado, caso o sistema possua amortecimento, sendo sempre regido pela excitação.

Pode-se também classificar a vibração como amortecida ou não amortecida. Numa vibração amortecida, o sistema é amortecido se houver dissipação de energia, enquanto que numa vibração não amortecida não existe dissipação de energia. Um sistema também pode ser caracterizado pelo seu fator de amortecimento, ξ , que se calcula através do quociente entre os fatores de amortecimento equivalente e crítico. Se $\xi < 1$, o sistema é sub-amortecido, se $\xi = 1$, o sistema é criticamente amortecido, e se $\xi > 1$, super-amortecido.

2.2.1 Sistema dinâmico com 1 GDL

Na área de vibrações mecânicas, existe uma variedade de casos a estudar, no que diz respeito à resposta de um sistema dinâmico. Neste projeto de dissertação, o caso de estudo prende-se à resposta forçada de sistemas, daí ser importante caracterizar esse tipo de resposta no sistema mais simples, ou seja, sistemas com 1 GDL.

Seguindo o trabalho desenvolvido por Maia *et al.* [15], é possível observar uma boa caracterização de um sistema com 1 GDL. A resposta forçada de um sistema dinâmico pode resultar de vários tipos de excitação, das quais se destacam as solicitações harmónicas, não harmónicas mas periódicas e as aleatórias. A resposta de um sistema dinâmico é harmónica se a força de excitação aplicada ao sistema também for harmónica. Assim sendo, uma força harmónica pode ser traduzida por

$$f(t) = F e^{i(\omega_f t + \phi)} = F \cos(\omega_f t + \phi) \quad (2.1)$$

onde F representa a amplitude da força e ω_f a frequência forçada e ϕ o ângulo de fase entre a força e o referencial considerado.

Se considerarmos o sistema massa-mola-amortecedor com amortecimento viscoso, já referido anteriormente, e aplicarmos uma força harmónica $f(t)$, onde o ângulo de fase $\phi = 0$, podemos descrever a equação do movimento a partir da segunda lei de Newton,

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \cos(\omega_f t) \quad (2.2)$$

onde M , C e K representam, respetivamente, a massa, o amortecimento viscoso e a rigidez, com \ddot{x} , \dot{x} e x , a representar a aceleração, velocidade e o deslocamento da massa. A resposta dinâmica do sistema é obtida pelo somatório da solução homogénea $x_h(t)$, com a solução particular $x_p(t)$. A solução homogénea representa a vibração livre do sistema. Esta resposta livre decai, ficando apenas em função das propriedades do sistema. A solução particular representa a resposta do sistema em regime estacionário, isto é, enquanto a força atuar no sistema. Quando a resposta geral do sistema está no regime transitório, há sobreposição das respostas livre e forçada. Assim sendo, a resposta dinâmica geral do sistema é obtida pela soma da solução particular com a solução homogénea:

$$x = x_h + x_p \quad (2.3)$$

$$x(t) = X_h e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_a t - \phi_1) + X_p \cos(\omega_f t - \phi_2) \quad (2.4)$$

onde X_h e X_p representam, respetivamente, a amplitude da resposta de deslocamento da solução homogénea e particular. Representa-se por ξ o fator de amortecimento, ω_n a frequência natural não-amortecida do sistema e ω_a a frequência natural amortecida

$$\xi = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2M\omega_n} \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad ; \quad \omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.5)$$

onde C_c se denomina por amortecimento crítico e traduz o valor do amortecimento em que se dá a transição entre o movimento oscilatório e o não-oscilatório da solução homogénea.

A solução homogénea é obtida tornando nula a força externa aplicada, isto é, fazendo $f(t) = 0$. Considerando então o sistema descrito em (2.2), a solução particular é dada por:

$$x_p(t) = X_p \cos(\omega_f t - \phi_2) \quad (2.6)$$

De acordo com [14], para obtermos a resposta do sistema em regime estacionário, numa primeira fase, substitui-se a equação (2.6) na equação do movimento (2.2):

$$X_p[(K - M\omega_f^2) \cos(\omega_f t - \phi_2) - C\omega_f \sin(\omega_f t - \phi_2)] = F \cos(\omega_f t) \quad (2.7)$$

Utilizando as relações trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(\omega_f t - \phi_2) &= \cos \omega_f t \cos \phi_2 + \sin \omega_f t \sin \phi_2 \\ \sin(\omega_f t - \phi_2) &= \sin \omega_f t \cos \phi_2 - \cos \omega_f t \sin \phi_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

na equação (2.7) e igualando os coeficientes $\cos \omega_f t$ e $\sin \omega_f t$ em ambos os membros resulta:

$$\begin{aligned} X_p[(K - M\omega_f^2) \cos(\phi_2) + C\omega_f \sin(\phi_2)] &= F \\ X_p[(K - M\omega_f^2) \sin(\phi_2) + C\omega_f \cos(\phi_2)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Resolvendo (2.9), a amplitude X_p define-se:

$$X_p = \frac{F}{\sqrt{(K - M\omega_f^2)^2 + (C\omega_f)^2}} \quad (2.10)$$

com ϕ_2 a representar a fase entre a força F e a amplitude de resposta de deslocamento X_p

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{C\omega_f}{K - M\omega_f^2} \right) \quad (2.11)$$

Estas equações são também conhecidas na literatura da seguinte forma:

$$X_p = \frac{F}{K\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.12)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right) \quad (2.13)$$

onde r representa a relação entre frequências $r = \omega_f / \omega_n$.

2.2.2 Transmissibilidade de Deslocamentos num sistema com 1 GDL

A transmissibilidade de deslocamentos é um conceito de extrema importância na presente dissertação, visto que é com base no conceito de transmissibilidade que se pretende realizar a identificação de forças num sistema MGD. No entanto, numa primeira fase, introduz-se a transmissibilidade de deslocamentos num sistema com 1 GDL.

Se considerarmos o sistema massa-mola-amortecedor, representado na Figura 2.4, a transmissibilidade de deslocamentos define-se pela razão entre o movimento da massa e da base do sistema. Neste caso, a solicitação harmónica é imposta pelo movimento da base com uma amplitude de deslocamento Y .

Para que seja possível caracterizar o conceito da transmissibilidade de deslocamentos, comecemos por considerar um sistema massa-mola-amortecedor, representado na Figura 2.4.

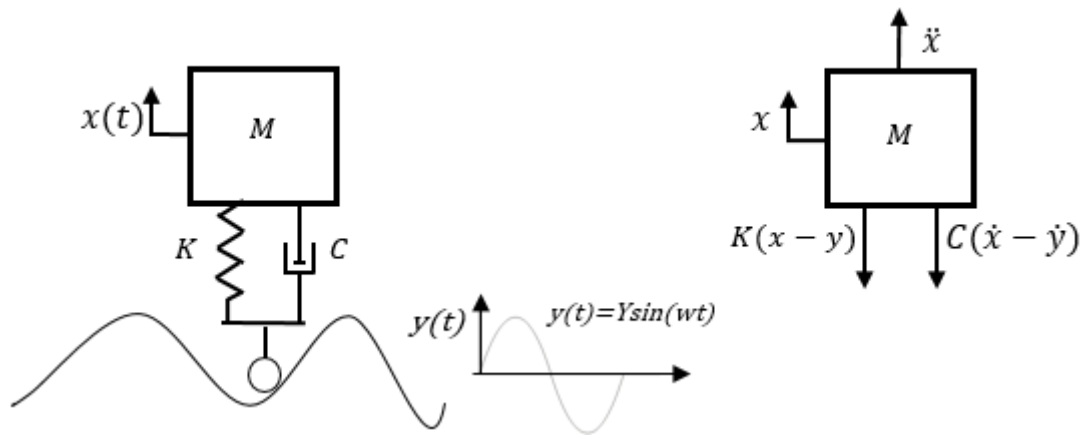


Figura 2.4 – Sistema massa-mola-amortecedor com excitação harmónica na base.

Aqui, $x(t)$ representa a coordenada do movimento da massa e $y(t)$ representa a coordenada do movimento oscilatório imposto à base do sistema. A partir do diagrama de corpo livre do sistema é possível escrever a equação do movimento:

$$M\ddot{x} + C(\dot{x} - \dot{y}) + K(x - y) = 0 \Leftrightarrow M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = C\dot{y} + Ky \quad (2.14)$$

A partir da equação do movimento (2.14), demonstra-se como obter a razão entre os deslocamentos da massa e da base, também conhecida normalmente na literatura por TR , ou ainda por $T^{(d)}$ – transmissibilidade de deslocamento. Considerando o movimento oscilatório harmónico da base por $y(t) = Y \sin(\omega_f t)$, é possível constatar a seguinte igualdade,

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = KY \sin(\omega_f t) + C\omega_f Y \cos(\omega_f t) = G \cos(\omega_f t + \phi) \quad (2.15)$$

onde $G = Y\sqrt{K^2 + (C\omega_f)^2}$ representa a amplitude de uma força equivalente que é aplicada à massa do sistema, considerando que a base é fixa e não móvel. Esta força equivalente surge devido

ao movimento oscilatório da base. Desdobrando o membro esquerdo da equação (2.15) obtém-se:

$$X\sqrt{(K - M\omega_f)^2 + (C\omega_f)^2} = Y\sqrt{K^2 + (C\omega_f)^2} \quad (2.16)$$

Pode-se assim relacionar as amplitudes dos deslocamentos de X e Y , e apresentar o termo de transmissibilidade de deslocamentos e o respetivo ângulo de fase ϕ_3 :

$$\frac{X}{Y} = T^{(d)} = TR = \frac{\sqrt{K^2 + (C\omega_f)^2}}{\sqrt{(K - M\omega_f)^2 + (C\omega_f)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.17)$$

$$\phi_3 = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right) \quad (2.18)$$

No seguimento do presente documento, será dedicado um capítulo que explica a metodologia utilizada na identificação de forças, expondo, detalhadamente, o princípio da transmissibilidade de deslocamentos em sistemas MGD L.

2.2.3 Sistema Dinâmico MGD L

Nesta secção, será apresentada a caracterização de sistemas dinâmicos com MGD L. É este tipo de sistemas que mais interessa na análise dinâmica estrutural pois, na realidade, as estruturas que nos rodeiam são sistemas com inúmeros GDL. Para que seja possível estudá-las, cabe ao investigador aproximar este tipo de sistemas com um número finito de GDL, sendo assim possível tornar o sistema discreto e caracterizá-lo.

A dinâmica de um sistema MGD L caracteriza-se por n equações diferenciais de segunda ordem, onde n representa o número de GDL. No fundo, um sistema MGD L como apresentado na Figura 2.3, pode ser interpretado como o acoplamento de vários sistemas com 1 GDL. Um sistema MGD L pode ser caracterizado pelo seguinte sistema de equações,

$$\mathbf{M}\{\ddot{x}\} + \mathbf{C}\{\dot{x}\} + \mathbf{K}\{x\} = \mathbf{F} \quad (2.19)$$

onde \mathbf{M} representa a matriz massa do sistema, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, \mathbf{K} a matriz rigidez, \mathbf{F} o vetor carregamento e $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$ e $\{x\}$ os vetores aceleração, velocidade e deslocamento, respetivamente.

De maneira a entender melhor os conceitos de matriz de rigidez, massa e amortecimento, segue-se uma breve explicação com base no MEF.

De acordo com [24], se considerarmos um elemento finito barra-viga 2D, este é composto por 2 nós, cada um com 3 graus de liberdade que correspondem ao deslocamento axial u (eixo x), ao deslocamento transversal v (eixo y) e às rotações dos nós do elemento θ , como apresentado na Figura 2.5.



Figura 2.5 – Elemento barra-viga com 6 graus de liberdade, adaptado de [24].

Para um único elemento, a matriz rigidez em coordenadas locais toma a seguinte forma,

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde E representa o módulo de Young, A a área da secção transversal, L o comprimento do elemento e I o 2.º momento de área. Sabe-se que a matriz transformação de coordenadas do referencial local para o global para este elemento pode ser dada por,

$$\mathbf{T}_{lg} = \begin{bmatrix} \cos \varsigma & \sin \varsigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varsigma & \cos \varsigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varsigma & \sin \varsigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varsigma & \cos \varsigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde ς representa o ângulo entre o referencial global (como visto na Figura 2.5) e o referencial local (disposição real do elemento). Assim, é possível, construir a matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais, realizando o produto matricial.

$$\mathbf{K}_g = [\mathbf{T}_{lg}]^T [\mathbf{K}_l] [\mathbf{T}_{lg}] \quad (2.22)$$

Seguidamente, caracteriza-se a matriz massa do elemento. Assim, da mesma forma que para a matriz rigidez, se enuncia a matriz massa em coordenadas locais,

$$\mathbf{M}_l = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13L}{420} \\ 0 & \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11L}{210} \\ 0 & -\frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} & 0 & -\frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

onde ρ representa a massa específica do elemento. Transformando a matriz massa de coordenadas locais para coordenadas globais, obtém-se:

$$\mathbf{M}_g = [\mathbf{T}_{lg}]^T [\mathbf{M}_l] [\mathbf{T}_{lg}] \quad (2.24)$$

Para finalizar, apresenta-se a matriz de amortecimento proporcional,

$$\mathbf{C} = \gamma \mathbf{K}_g + \beta \mathbf{M}_g \quad (2.25)$$

onde γ e β representam constantes proporcionais.

Nos sistemas MGD, de maneira a obter a matriz de massa e de rigidez, em coordenadas globais de toda a estrutura, é necessário fazer um processo chamado de assemblagem de matrizes. Com base no MEF, depois de caracterizar uma estrutura utilizando elementos, o processo de assemblagem permite a obtenção da matriz de rigidez e massa global da estrutura a partir das matrizes de rigidez e massa de cada elemento. Assim, a equação do movimento para um sistema MGD, como uma viga caracterizada com N GDL, toma a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & 0 \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{N,N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & 0 \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{N,N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & 0 \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{N,N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

2.2.4 Frequências Naturais e Modos de Vibração

Se considerarmos um sistema com 1 GDL, o modo de vibração característico é o movimento no qual todas as partes do sistema se movem de forma síncrona à mesma frequência. O modo de vibração é alcançado a uma certa frequência fixa, denominada de frequência natural.

A frequência natural é definida como sendo a frequência do sistema para a qual ele tende a oscilar em vibração livre não amortecida. Se ao sistema for imposta uma excitação com um

determinado conteúdo em frequência, e esta igualar a frequência natural do próprio sistema, ocorre um fenómeno de ressonância, para o qual se observa um pico na amplitude de deslocamento do sistema. De maneira a entender os conceitos de frequência natural e modo de vibração, considera-se o problema simples de uma vibração livre, sem amortecimento, de um sistema:

$$\mathbf{M}\{\ddot{x}\} + \mathbf{K}\{x\} = 0 \quad (2.27)$$

De forma análoga, no caso de um sistema MGDG com n GDL, o sistema terá n frequências naturais, associadas a n modos de vibração.

De acordo com Maia *et al.* [15], as soluções do sistema representado pela equação (2.27) pode ser dada como,

$$x(t) = \bar{X}e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

onde \bar{X} é o vetor de amplitudes de respostas. Se substituirmos (2.28) em (2.27), obtém-se o seguinte sistema,

$$[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\{\bar{X}\} = 0 \quad (2.29)$$

que é a formulação de um problema de valores e vetores próprios. Eliminando a solução trivial que corresponde à resposta dinâmica nula, é possível encontrar a solução não trivial, chamada de equação característica do sistema. O problema próprio pode ser resolvido para determinar as frequências naturais ω_n do sistema (os valores próprios) e os modos de vibração Ψ_n (os vetores próprios) associados a estas,

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}] = 0 \quad (2.30)$$

onde \det representa o operador determinante.

Da equação (2.30) obtêm-se n soluções positivas reais $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2$ que representam as n frequências naturais do sistema. Substituindo cada frequência natural em (2.29) e resolvendo cada um dos sistemas de equações, obtemos os modos de vibração $\{\Psi_r\} = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n\}$ do sistema, onde cada modo n corresponde a uma frequência natural n .

A solução completa de um sistema na condição de vibração livre pode ser dada por duas matrizes que contêm a descrição completa das características dinâmicas do mesmo:

$$\omega_n^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \wedge \Psi = [\{\Psi_1\} \{\Psi_2\} \dots \{\Psi_n\}] \quad (2.31)$$

Na equação (2.31) são representadas as matrizes que constituem o que é conhecido como modelo modal, pois constituem as propriedades modais de um sistema dinâmico não amortecido. Na Figura 2.6 é possível observar os quatro primeiros modos de vibração de flexão de uma viga.

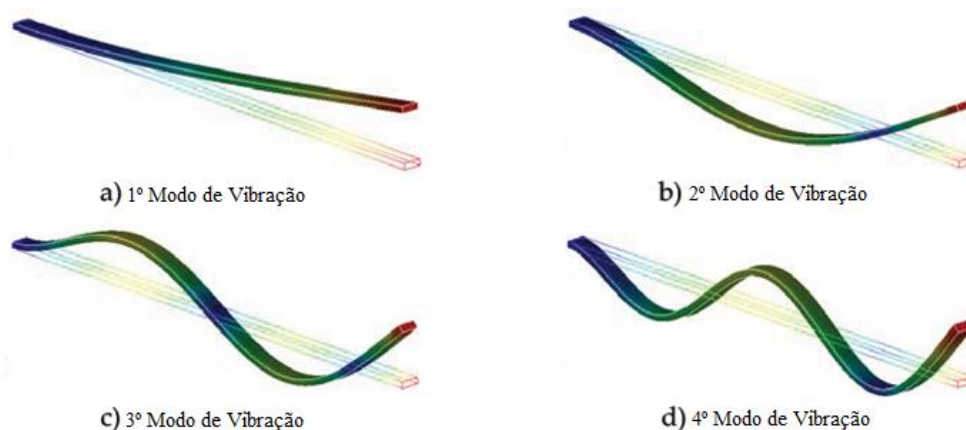


Figura 2.6 – Quatro primeiros modos de vibração de uma viga, retirado de [25].

2.2.5 Análise no domínio do tempo e da frequência

Qualquer sistema dinâmico pode ser modelado e representado no domínio do tempo e da frequência. Tendo em conta o caso de estudo na presente dissertação, isto é, a localização, quantificação e reconstrução de forças, é considerada apenas a modelação de sistemas no domínio da frequência.

A análise no domínio da frequência é uma vertente muito utilizada na área das vibrações mecânicas, pois traz inúmeras vantagens relativamente à representação no domínio do tempo. Neste projeto, o domínio da frequência facilita bastante a representação e compreensão do conceito de transmissibilidade e do problema inverso utilizado para a identificação de forças.

No domínio do tempo, o modelo é avaliado de acordo com a sua progressão no tempo, enquanto que no domínio da frequência, o modelo é analisado de acordo com a sua resposta numa gama de frequências. Um sinal no domínio do tempo pode ser transformado para o domínio da frequência através do processo conhecido como Transformada de Fourier e vice-versa. A análise no domínio da frequência de um sistema é uma prática bastante utilizada na área. De entre as inúmeras aplicações, destacam-se a simplificação da função de convolução de sinais (função esta bastante complexa no domínio do tempo) para uma função simples de multiplicação de sinais, bem como a interpretação dos sinais de vibração.

Quando se pretende representar a resposta de um sistema face a uma excitação nele imposta, no domínio da frequência, a função que descreve a relação entrada-saída é chamada de Função de Resposta em Frequência – FRF. Assim, a dinâmica do sistema pode ser caracterizada por uma matriz composta por um conjunto de FRFs. Usualmente, as respostas das vibrações são representadas em termos de deslocamento e, assim, a matriz de FRFs é conhecida como matriz de receptância:

$$\mathbf{X}=\mathbf{H}\mathbf{F} \quad (2.32)$$

Se considerarmos as respostas medidas em termos de velocidade, a matriz de FRFs denomina-se por matriz de mobilidade e, em último caso, se considerarmos respostas sob a forma de acelerações, a matriz de FRFs é chamada por matriz de aceleração:

- Receptância = $H(\omega) = \frac{\text{deslocamento}}{\text{força de excitação}} = \frac{X}{F} \left[\frac{m}{N} \right];$
- Mobilidade = $\gamma(\omega) = \frac{\text{velocidade}}{\text{força de excitação}} = \frac{\dot{X}}{F} \left[\frac{m}{s} \frac{1}{N} \right];$
- Aceleração = $\alpha(\omega) = \frac{\text{aceleração}}{\text{força de excitação}} = \frac{\ddot{X}}{F} \left[\frac{m^2}{s} \frac{1}{N} \right].$

O inverso da receptância, mobilidade e aceleração, são conhecidas na literatura, como sendo as relações força/deslocamento, força/velocidade e força/aceleração:

- Rigidez Dinâmica = $Z(\omega) = \frac{\text{força de excitação}}{\text{deslocamento}} = \frac{F}{X} \left[\frac{N}{m} \right];$
- Impedância Mecânica = $Q(\omega) = \frac{\text{força de excitação}}{\text{velocidade}} = \frac{F}{\dot{X}} \left[\frac{N s}{m} \right];$
- Massa Aparente = $S(\omega) = \frac{\text{força de excitação}}{\text{aceleração}} = \frac{F}{\ddot{X}} \left[\frac{N s}{m^2} \right].$

2.3 Sensores de Aquisição

Na área da investigação, qualquer trabalho de carácter científico pode ser composto por duas componentes: uma teórica e outra experimental. A componente experimental pode ser utilizada de modo a validar a componente teórica.

Como já foi referido anteriormente no capítulo INTRODUÇÃO, a presente dissertação tem o objetivo de testar a hipótese de identificar forças com base no conceito de transmissibilidade de deslocamentos e, fisicamente, o processo passa por uma vertente teórica/numérica e outra experimental. Com o objetivo de adquirir dados experimentais, é necessário rever o conceito de sensores e perceber o que são, como funcionam e qual a sua diversidade.

2.3.1 Sensores Piezoelétricos

Os sensores piezoelétricos são sensores bastante utilizados na investigação em dinâmica estrutural e na indústria, e combinam o uso da segunda lei de Newton e do efeito piezoelétrico para medir diversas grandezas, tal como: aceleração; pressão; temperatura; força. No âmbito do tema em estudo, analisa-se o acelerómetro piezoelétrico. Um acelerómetro piezoelétrico é composto por uma massa sísmica que, estando sujeita a uma força por ação da aceleração da sua base de suporte, cria uma deformação num cristal de quartzo. Assim, o acelerómetro consegue

converter a sua deformação num sinal elétrico, que será analisado posteriormente. Na Figura 2.7 é possível observar um esquema deste tipo de sensor piezoelétrico.

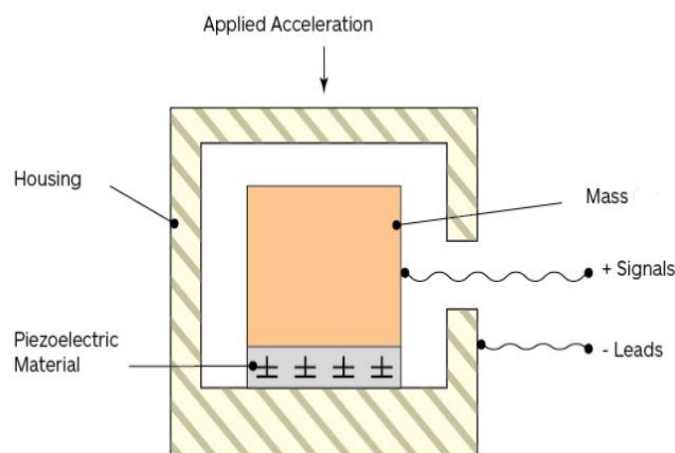


Figura 2.7 – Esquema de um acelerómetro piezoelétrico, retirado de [26].

Este tipo de tecnologia baseia-se no efeito piezoelétrico². O efeito piezoelétrico dá-se quando os materiais piezoelétricos são sujeitos a uma velocidade de deformação e produzem uma carga elétrica proporcional à força aplicada e à correspondente aceleração. Até aos dias de hoje, este tipo de sensor tem sido maioritariamente utilizado na obtenção da resposta dinâmica de um sistema. No entanto, o avanço da tecnologia tem permitido ao ramo da investigação a utilização de outro tipo de sensores, como por exemplo os sensores de efeito de Hall.

2.3.2 Sensores de efeito de Hall

Como referido anteriormente, pretende-se utilizar este tipo de sensores na obtenção do modelo de resposta de um sistema, sendo estes capazes de medir diretamente o deslocamento do mesmo. Os sensores utilizados neste trabalho são classificados de sensores não-contacto, que detetam uma variação de campo magnético através do efeito Hall³.

Segundo [27], um sensor de efeito de Hall é um transdutor que, devido à variação do campo magnético, devolve uma diferença de potencial, conhecida como diferença de potencial de Hall, ou tensão de Hall. A diferença de potencial de Hall depende tanto da magnitude e da direção do campo magnético, como da corrente elétrica fornecida no caso de eletroímãs. O campo magnético atravessa o sensor de Hall e a tensão de Hall é gerada proporcionalmente. O sensor opera como um transdutor analógico, devolvendo uma diferença de potencial. Sabendo a relação que existe entre a variação do campo magnético e a diferença de tensão devolvida pelo sensor, é possível calibrá-lo e utilizá-lo na aquisição de dados relativos ao deslocamento de uma

² Efeito descoberto em 1880 pelos físicos Jacques e Pierre Curie [38].

³ Efeito descoberto em 1879 por Edwin Hall [39].

estrutura, ou seja, é possível medir a variação de deslocamento entre um ímã colado a uma estrutura e o sensor colocado numa posição fixa. Na Figura 2.8, é possível observar o princípio de funcionamento deste tipo de sensor.

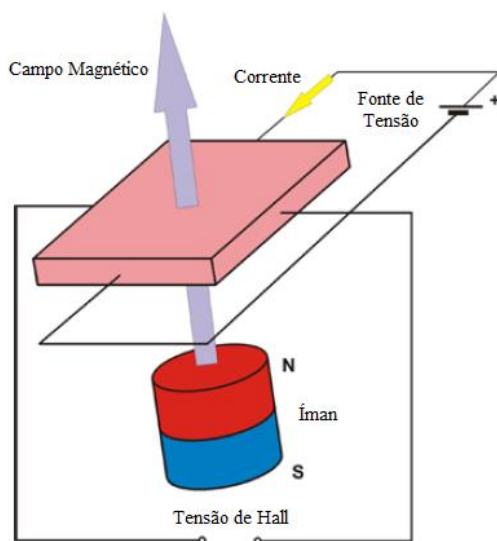


Figura 2.8 – Princípio de funcionamento do efeito Hall, retirado de [27].

Existem dois tipos de sensor de Hall: os que devolvem um sinal linear (contínuo no tempo) ou os que devolvem um sinal digital (descontínuo, discreto). Neste projeto, serão usados os sensores de efeito de Hall lineares. Chamam-se lineares pois devolvem um sinal analógico que é retirado diretamente do amplificador. Assim, é possível registrar valores de tensão para certas distâncias entre o ímã e o sensor, possibilitando a construção de curvas calibração deste último.

2.3.3 Sensores Piezoelétricos e Sensores de efeito de Hall

Na atualidade, são inúmeras as aplicações onde são utilizados sensores, quer no setor industrial, investigação ou na tecnologia que utilizamos no dia-a-dia. No entanto, estes dois tipos de sensores têm as suas limitações.

Face ao objetivo da presente dissertação, os sensores piezoelétricos apresentam sérias vantagens no que diz respeito à largura de banda, isto é, conseguem obter ótimas leituras numa amplitude de frequência elevada. Outra grande vantagem deste tipo de sensor são os materiais que o incorporam, permitindo assim o seu funcionamento numa gama de temperaturas alta. No entanto, face às metas deste projeto, as suas principais desvantagens são o seu elevado custo e a condição de que têm de estar em contacto com a estrutura, o que traduz numa alteração estrutural que pode ser significativa, para estruturas leves.

Na ótica anteriormente apresentada, os sensores de efeito de Hall trazem grandes vantagens, não só por serem de custo reduzido, mas também por serem capazes de obter uma

leitura direta de deslocamento de uma estrutura, não estando em contacto com esta. De referir, que estes sensores não são habitualmente utilizados na área de vibrações. Assim, pretende-se neste trabalho avaliar a sua aplicabilidade, concretamente na capacidade de medir deslocamento. Embora se revelem uma mais valia neste projeto, estes sensores são bastante frágeis e são sensíveis à qualidade da sua instrumentação. Na Figura 2.9, é possível observar um sensor de efeito Hall (à esquerda) e um acelerómetro piezoelétrico (à direita).

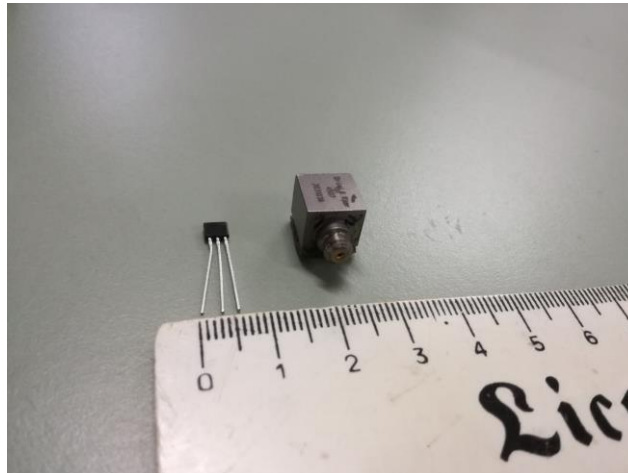


Figura 2.9 – Sensor de efeito Hall (à esquerda) e acelerómetro piezoelétrico (à direita).

3 IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS COM BASE NO CONCEITO DA TRANSMISSIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS EM SISTEMAS MGD

A transmissibilidade de deslocamentos é uma das vias para se identificar forças num sistema, sendo um conceito chave neste trabalho. A metodologia escolhida para abordar este tema surgiu, pela primeira vez, a partir do grupo de Investigação onde se inserem os orientadores desta dissertação. A origem e o avanço desta técnica podem ser consultadas em diversos trabalhos já enunciados no capítulo INTRODUÇÃO. Nesta secção, pretende-se demonstrar todo o processo utilizado na identificação de forças, começando por explicar o conceito de transmissibilidade de deslocamentos em sistemas MGD, bem como as suas condições e limitações. Seguidamente, apresenta-se o método utilizado para a identificação de forças. Posteriormente, apresentar-se-á uma aplicação numérica, composta por diversas simulações, de modo a verificar a metodologia em estudo.

3.1 Transmissibilidade de Deslocamentos num sistema MGD

Como explicado no capítulo FUNDAMENTOS DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS, num sistema com 1 GDL como o da Figura 2.4, a transmissibilidade de deslocamentos define-se como sendo a razão entre o movimento da massa e o movimento da base do sistema. No entanto, como demonstrado em [7], num sistema MGD a transmissibilidade deixa de ser uma simples função e passa a ter a forma matricial composta por múltiplas funções.

Conforme Lage *et al.* [9], para começar a análise da transmissibilidade de deslocamentos, é essencial ter em atenção algumas premissas. Em primeiro lugar, é importante considerar uma estrutura que não esteja constrangida por apoios (condição livre-livre), pois assim é possível

estudar somente as forças de excitação aplicadas ao sistema. Posteriormente, é necessário definir 4 conjuntos de coordenadas: o primeiro conjunto define-se como K , sendo o conjunto de coordenadas onde as respostas do sistema \mathbf{Y}_K são medidas e consideradas conhecidas no processamento do algoritmo; o segundo conjunto U é definido como sendo o conjunto de coordenadas onde as respostas do sistema \mathbf{Y}_U são medidas e consideradas “desconhecidas” no processamento do algoritmo; o terceiro conjunto A define-se como sendo o conjunto de coordenadas onde podem ser aplicadas as forças \mathbf{F}_A ; e o quarto conjunto C é definido como sendo o conjunto definido por todas as outras coordenadas que caracterizam o sistema. Na Figura 3.1, é possível observar uma imagem que ilustra os conjuntos de coordenadas anteriormente mencionados.

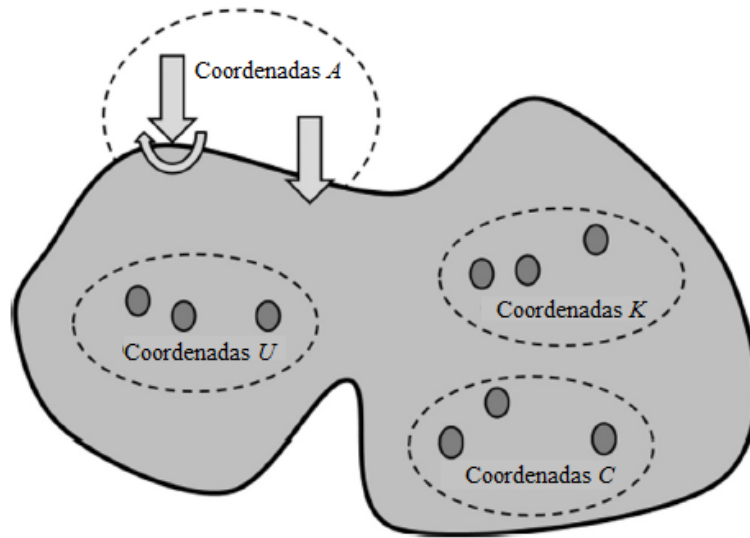


Figura 3.1 – Conjuntos de coordenadas $\#A$, $\#U$, $\#K$ e $\#C$ de uma estrutura em condição livre-livre, retirado de [9].

Conforme o trabalho [7], definidos os conjuntos de coordenadas, é possível relacionar as respostas do sistema face à ação de forças externas de excitação,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_A \\ \mathbf{Y}_U \\ \mathbf{Y}_K \\ \mathbf{Y}_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{AA} \\ \mathbf{H}_{UA} \\ \mathbf{H}_{KA} \\ \mathbf{H}_{CA} \end{bmatrix} \{\mathbf{F}_A\} \quad (3.1)$$

onde \mathbf{H}_{AA} , \mathbf{H}_{UA} , \mathbf{H}_{KA} e \mathbf{H}_{CA} representam, respetivamente, as sub-matrizes da matriz de receptância, nas coordenadas $\#A$, $\#U$, $\#K$ e $\#C$ face à excitação de forças externas no conjunto de coordenadas A . Na equação (3.1), considera-se apenas o deslocamento na direção y , daí a terminologia de sub-matriz de receptância, pois a matriz de receptância, no caso de uma barra-viga 2D, é composta por $n \times 3$ graus de liberdade (translação no eixo $x - u$, translação em $y - v$, e rotação em torno de $z - \theta$), onde n representa o número de nós de cada elemento em que a estrutura é decomposta.

Note-se que, no caso de se utilizar dados experimentais, utiliza-se a notação de $\tilde{\mathbf{Y}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ e $\tilde{\mathbf{F}}$ de modo a diferenciar dados provenientes de aplicações numéricas.

Considerando que \mathbf{F}_A representa um conjunto de forças aplicadas no sistema, é possível relacionar os deslocamentos nas coordenadas U e K , com as forças aplicadas \mathbf{F}_A :

$$\mathbf{Y}_U = \mathbf{H}_{UA}\mathbf{F}_A \quad \wedge \quad \mathbf{Y}_K = \mathbf{H}_{KA}\mathbf{F}_A \quad (3.2)$$

Resolvendo a equação (3.2) em ordem a \mathbf{F}_A , é possível obter a relação,

$$\mathbf{Y}_U = (\mathbf{H}_{UA}\mathbf{H}_{KA}^+)\mathbf{Y}_K \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{H}_{KA}^+ = (\mathbf{H}_{KA}^T\mathbf{H}_{KA})^{-1}\mathbf{H}_{KA}^T$ representa a pseudo-inversa de \mathbf{H}_{KA} . Assim sendo, uma das condições impostas nesta metodologia impõe que, devido ao mau condicionamento do problema inverso, a relação na equação (3.3) só se verifica, se o número de respostas dinâmicas conhecidas, for maior ou igual ao número de forças aplicadas, $\#K \geq \#A$. Assim, é possível definir a matriz de transmissibilidade de deslocamentos (índice d):

$$\mathbf{T}_{UK}^{(d)A} = \mathbf{H}_{UA}\mathbf{H}_{KA}^+ \quad (3.4)$$

O conceito de transmissibilidade de deslocamentos estabelece a relação entre um conjunto de respostas desconhecidas, a partir de algumas respostas conhecidas, utilizando modelos de receptâncias numéricos destas duas. Assim, consideramos conhecidas \mathbf{Y}_K respostas e, com base na matriz de transmissibilidade construída no modelo numérico, calculam-se \mathbf{Y}_U respostas. E é por esta forma, comparando as respostas \mathbf{Y}_U calculadas com as $\tilde{\mathbf{Y}}_U$ medidas, calcula-se o erro entre as duas por forma a identificar a força aplicada.

Como referido na secção Análise no domínio do tempo e da frequência, a matriz receptância \mathbf{H} é dada como uma função de resposta em frequência e relaciona a resposta de um sistema, em termos de deslocamento, face à excitação nele imposta:

$$H(\omega) = \frac{\text{deslocamento}}{\text{força de excitação}} \quad (3.5)$$

Esquemáticamente, a matriz de receptância \mathbf{H} pode ser apresentada como se ilustra na Figura 3.2, onde cada linha e coluna é composta por n graus de liberdade.

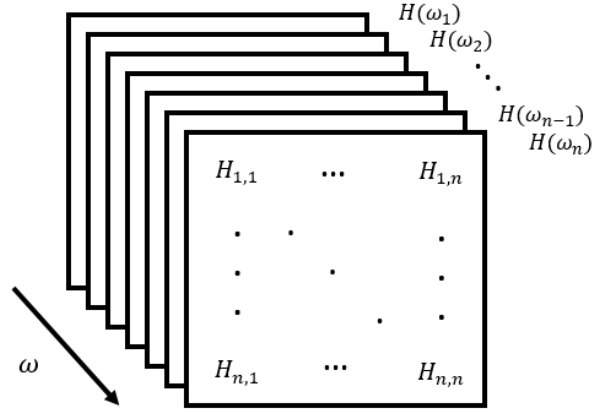


Figura 3.2 – Matriz receptância em função da frequência ω , adaptado de [28].

A título de exemplo, considere-se uma viga composta n GDL. Se uma resposta Y for obtida numa coordenada conhecida $\#K$, devido à ação de uma força de excitação F na coordenada $\#A$, representa-se o elemento da sub-matriz H_{KA} da seguinte forma:

$$H_{KA} = \frac{Y_K}{F_A} \quad (3.6)$$

Neste contexto, de modo a auxiliar a compreensão de uma FRF, é possível gerar um gráfico que relaciona a amplitude da FRF medida, em função de um espectro de frequência apropriadamente definido, como por exemplo a FRF da Figura 3.3.

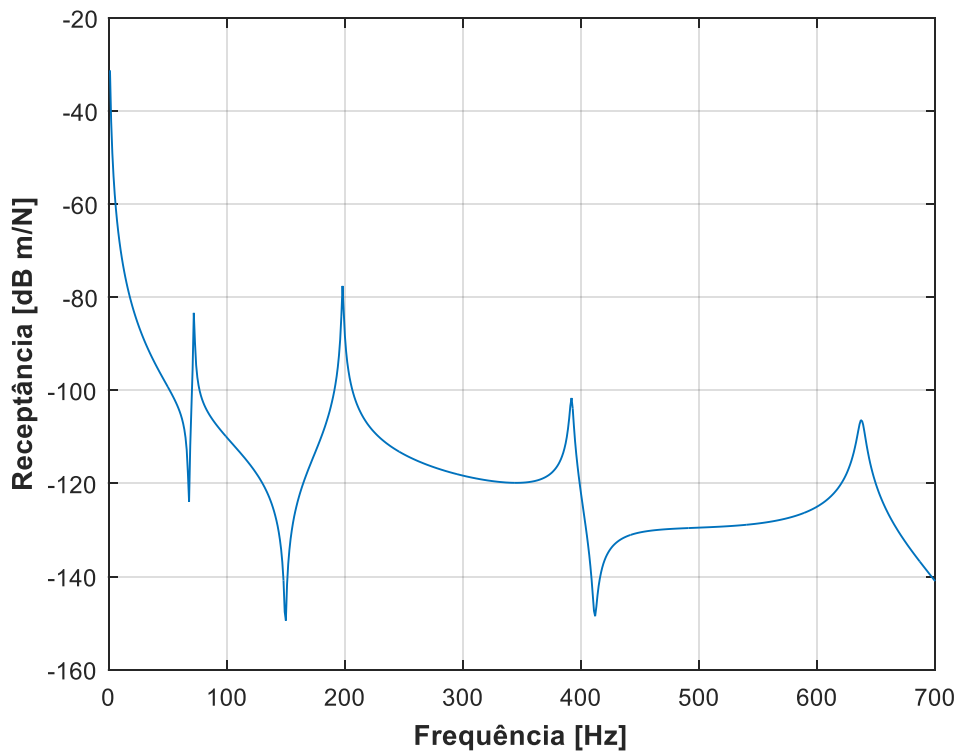


Figura 3.3 – Função de resposta em frequência $H_{j,k}$.

Se observarmos a Figura 3.3 os picos superiores da função correspondem às ressonâncias, e os inferiores às anti-ressonâncias.

3.2 Identificação de Forças

Nesta secção, apresenta-se um método de identificação de forças em sistemas MGD L com base no conceito da transmissibilidade de deslocamentos, pela primeira vez proposto e publicado por Lage *et al.* [10].

A identificação de forças numa estrutura lida com a localização, quantificação e reconstrução de forças dinâmicas desconhecidas, a partir da sua resposta, utilizando um modelo de análise numérico do sistema e um número limitado de sensores. A medição direta de forças de excitação numa estrutura é, normalmente, muito difícil ou impossível, seja por inacessibilidade na estrutura, seja pela impossibilidade de instalar sensores de aquisição. Assim, existe a necessidade de localizar as forças, utilizando uma abordagem inversa, isto é, a partir da resposta do sistema tenta-se chegar às fontes de excitação. O problema inverso pode ser mal-colocado e mal condicionado, sendo sensível à qualidade dos dados experimentais.

Se fosse possível medir todas as respostas $\tilde{\mathbf{Y}}$ numa estrutura, facilmente se reconstituía o vetor de forças aplicadas no sistema. A partir do modelo numérico da estrutura, seria possível obter o modelo de resposta de todo o sistema \mathbf{H} e o problema inverso resumia-se a aplicar o cálculo seguinte:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1}\tilde{\mathbf{Y}} \quad (3.7)$$

No entanto, como referido anteriormente, é praticamente impossível medir todas as respostas $\tilde{\mathbf{Y}}$, justificando-se a implementação de uma metodologia capaz de solucionar o problema inverso, com apenas algumas respostas medidas.

Neste contexto, numa primeira fase é utilizado um algoritmo (Figura 3.4) que, recorrendo à transmissibilidade de deslocamentos entre dois conjuntos de respostas, procura o número e as posições das forças aplicadas à estrutura. Seguidamente, sabendo o número e localização das forças, é possível resolver o problema inverso utilizando a sub-matriz de receptância, e as respostas medidas.

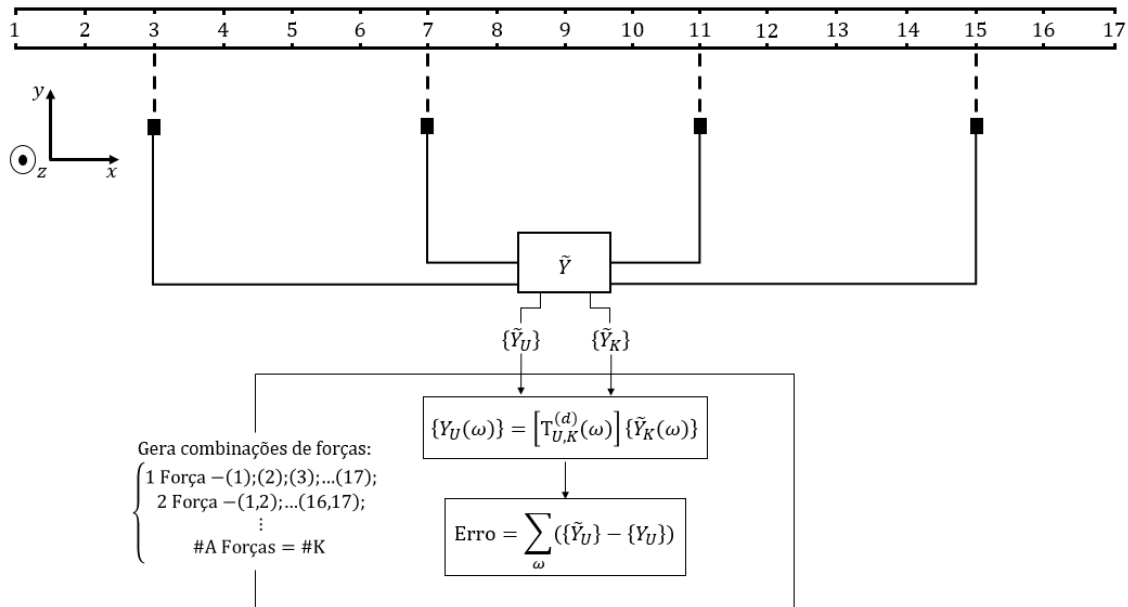


Figura 3.4 – Esquema do algoritmo utilizado na localização e quantificação de forças.

Por forma a clarificar melhor a metodologia utilizada no algoritmo, considere-se ainda o esquema da Figura 3.4. Experimentalmente, só se tem acesso a algumas respostas $\tilde{\mathbf{Y}}$ e, dessas respostas medidas, dividimo-las em dois grupos de coordenadas com a intenção de modelá-las numericamente: um grupo que se conhece as respostas $\tilde{\mathbf{Y}}_K$ e outro grupo que “não se conhece” as respostas $\tilde{\mathbf{Y}}_U$. De seguida, recorre-se a um algoritmo que, numa primeira fase, calcula a matriz de transmissibilidade enunciada na equação (3.4) que relaciona os conjuntos de coordenadas $\#K$ e $\#U$. Como a posição das forças aplicadas $\#A$ é desconhecida, é necessário calcular todas as

matrizes de transmissibilidade até que, através da equação (3.3), as respostas calculadas \mathbf{Y}_U correspondam às respostas medidas que “não se conhece” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$. Este último passo atinge-se quando, para cada combinação de forças (uma força, duas forças, $\#A = \#K$) se calcula o erro associado entre as respostas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e \mathbf{Y}_U . Todo este processo é realizado num espectro de frequência apropriadamente definido. A combinação que apresentar o menor erro acusa a quantidade e posição das forças aplicadas à estrutura. Este erro, utilizado em [10], para cada combinação e , é dado como:

$$Erro_e = \sum_{\omega} \left(\log \left(\text{abs} \left(\widetilde{Y}_e(\omega) \right) \right) - \log \left(\text{abs} \left(Y_e(\omega) \right) \right) \right)^2 \quad (3.8)$$

Para que seja possível realizar o processo anterior, é necessário gerar as combinações de forças exercidas nos nós, assim:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Força: } & (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), \dots (17); \\ 2 \text{ Forças: } & \left\{ \begin{aligned} & (1,2), (1,3), (1,4), (1,2), \dots (16,17); \\ & (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), \dots (15,16,17). \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Após identificar as forças, resolve-se o problema inverso, utilizando a sub-matriz receptância proveniente do modelo numérico e todas as respostas medidas,

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_y^+ \widetilde{\mathbf{Y}} \quad (3.10)$$

onde \mathbf{H}_y^+ representa a sub-matriz de receptância numérica, correspondente aos GDL y medidos.

3.3 Modelo de Elementos Finitos

Para que seja possível aplicar a metodologia enunciada anteriormente, é necessário um suporte computacional (Matlab), sendo assim possível construir o modelo numérico reduzido da estrutura e o algoritmo necessário à identificação de forças.

Para construir o modelo numérico da estrutura é utilizado o MEF. O MEF tem que satisfazer alguns parâmetros, para que simule o melhor possível o modelo experimental, através de uma boa estimativa das matrizes de rigidez \mathbf{K} , massa \mathbf{M} e amortecimento \mathbf{C} da estrutura. Para isso é construído o modelo de uma viga, em condição livre-livre, composta por 16 elementos e 17 nós (Figura 3.5) com as características definidas na Tabela 3.1.

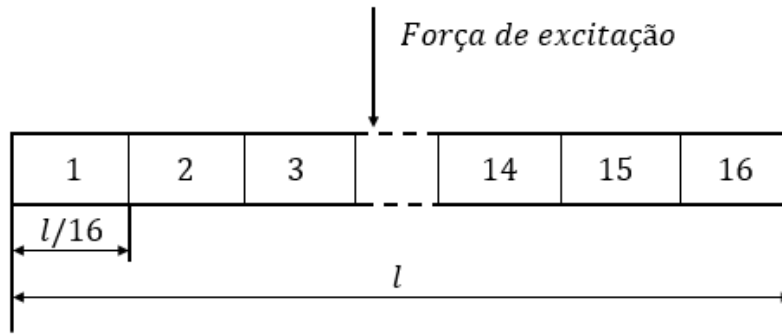


Figura 3.5 – Aspeto esquemático da viga decomposta em 16 elementos, adaptado de [10].

Tabela 3.1 – Propriedades da viga.

| | |
|------------------------------|-----------------------------------|
| Comprimento, l | 0.86 m |
| Densidade, ρ | 7681.69 kg/m ³ |
| Módulo de Young, E | 210 GPa |
| Área de secção, A | $1.6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ |
| Segundo momento de área, I | $1.33 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ |

Cada um dos 16 elementos utilizados satisfaz as propriedades de um elemento barra-viga de Bernoulli-Euler 2D, e é composto por dois nós, cada um com três graus de liberdade x , y e θ . A razão pelo qual foi escolhido um elemento barra-viga de Bernoulli-Euler, reside nas propriedades geométricas da viga em estudo. Como a viga apresenta uma espessura bastante inferior relativamente ao seu comprimento, no processo de deformação à flexão, a secção transversal é considerada sempre perpendicular à linha neutra, uma vez que o valor da tensão de corte é muito inferior à tensão axial, sendo assim desprezada.

A partir de \mathbf{K} , \mathbf{M} e \mathbf{C} obtém-se a matriz de rigidez dinâmica \mathbf{Z} que, visto cada nó ter três graus de liberdade, tem dimensão 51×51 (17×3):

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{Y}} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} \quad (3.11)$$

Para o problema em questão, é necessário trabalhar com a receptância, por isso:

$$\mathbf{H} = \mathbf{Z}^{-1} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C})^{-1} \quad (3.12)$$

Como se medem apenas deslocamentos segundo a direção transversal, eixo y , dos 51 GDL da matriz receptância, consideram-se apenas 17, correspondendo ao modelo de resposta \mathbf{H}_y^+ associado às respostas transversais dos 17 nós.

Uma das condições mais importantes neste método de identificação de forças reside na precisão do modelo numérico face ao modelo experimental, visto que a localização, quantificação

e reconstrução das forças de excitação é um processo híbrido que envolve respostas medidas experimentalmente e o modelo de resposta computacional, **H**.

3.4 Simulações Numéricas

Nesta secção, apresenta-se alguns exemplos numéricos. Com o auxílio da ferramenta Matlab, é possível obter respostas bastante próximas da estrutura concebida neste projeto e, assim, modelar a estrutura de maneira a testar a metodologia já enunciada. Serão apresentados exemplos de como localizar e quantificar forças com base no conceito da transmissibilidade, aplicadas à seguinte estrutura, podendo estas últimas serem de natureza constante ou harmónica no domínio da frequência:

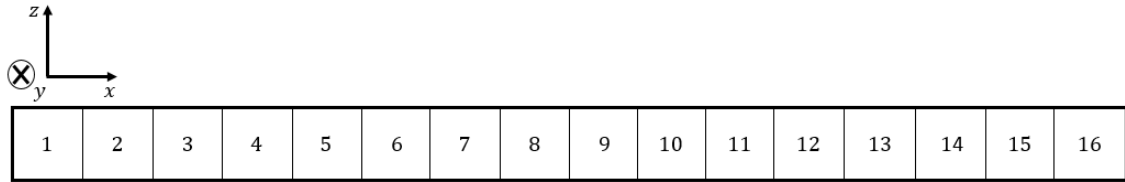


Figura 3.6 – Viga composta por 16 elementos.

3.4.1 Forças constantes no domínio da frequência – Simulação 1

Neste exemplo, demonstra-se como localizar e quantificar 2 forças constantes aplicadas nos nós 1 e 5 de uma viga em condições livre-livre (Figura 3.6), considerando 3 casos onde se utiliza:

- Caso 1. Duas respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e duas respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;
- Caso 2. Três respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e duas respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;
- Caso 3. Duas respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e três respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$.

Esta simulação tem também como objetivo comparar os resultados aqui obtidos, com os da 1.ª simulação numérica apresentada no trabalho publicado por *Lage et al.* [10]. No Anexo I, é possível observar os resultados obtidos em [10], relativamente aos dois primeiros casos enunciados anteriormente.

No 1.º caso, ilustrado na Figura 3.7, começa-se por assumir os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_3 \ Y_5\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_1 \ Y_{11}\}^T \quad (3.13)$$

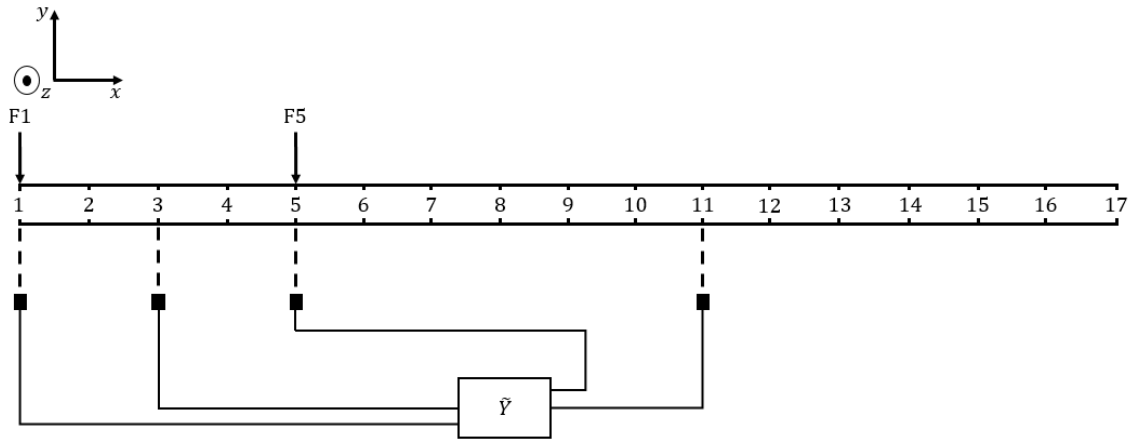


Figura 3.7 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 1.º caso.

Note-se que, tanto as forças como as respostas dinâmicas são avaliadas segundo o GDL de deslocamento transversal y , respeitando assim o referencial ilustrado na Figura 3.7.

É sabido, à partida, que o número de posições possíveis das forças não pode ser superior a duas forças, pois considera-se que conhecemos duas respostas \tilde{Y}_K , e assim $\#A \leq \#K$. Neste seguimento, considera-se a série de combinações com 1 e/ou 2 forças, descritas na equação (3.9).

Do modelo numérico, obtém-se o modelo de resposta completo da estrutura para cada nó, ou seja, é possível obter a sub-matriz de receptância H_y^+ considerando apenas os GDL de deslocamento transversal y de cada nó. Assim sendo, utilizando as respostas \tilde{Y}_K , é possível calcular as respostas Y_U a partir da matriz de transmissibilidade de deslocamentos:

$$Y_U = T_{UK}^{(d)A} \tilde{Y}_K \quad (3.14)$$

Para cada uma das combinações de forças consideradas inicialmente, recorrendo à transmissibilidade de deslocamentos, é possível aplicar o método da localização e quantificação de forças, calculando o erro acumulado entre as respostas medidas \tilde{Y}_U e Y_U , enunciado na equação (3.8):

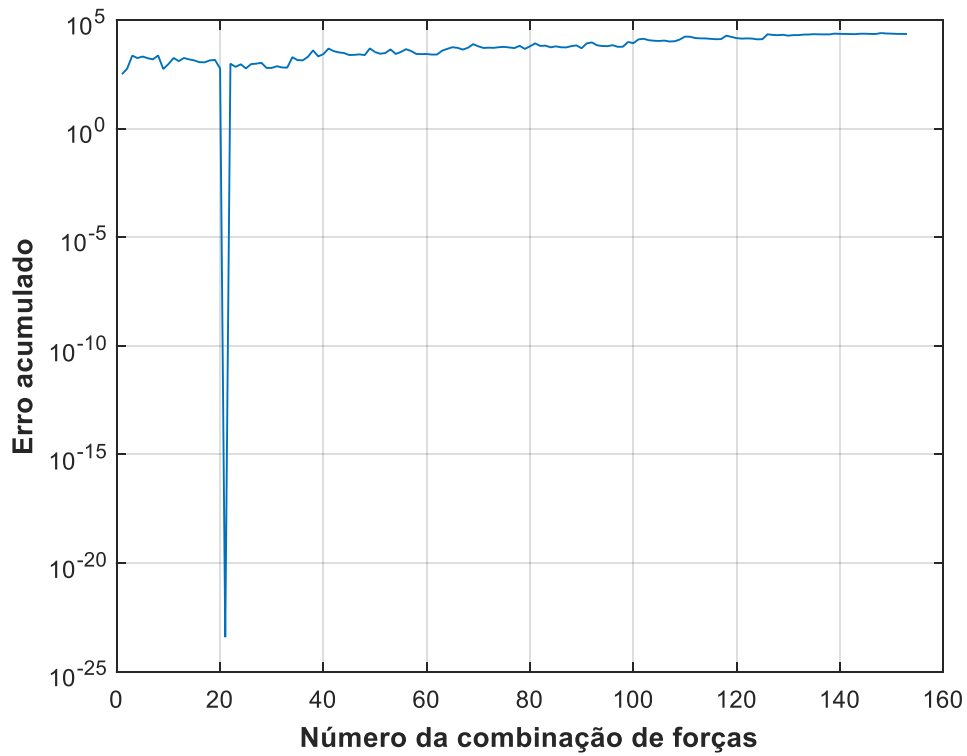


Figura 3.8 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=2$ e $\#U=2$.

Analisando a Figura 3.8, é possível observar um mínimo absoluto do erro acumulado, indicando a combinação de forças n.º 21. Esta combinação identifica os nós 1 e 5, como as posições em que é mais provável estarem aplicadas forças.

Segue-se o 2.º caso em análise, ilustrado na Figura 3.9. Aqui, são consideradas conhecidas 3 respostas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e 2 “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$, havendo a possibilidade de estarem aplicadas à estrutura 3 forças ($\#A \leq \#K$). Assume-se os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_3 \ Y_5 \ Y_{17}\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_1 \ Y_{11}\}^T \quad (3.15)$$

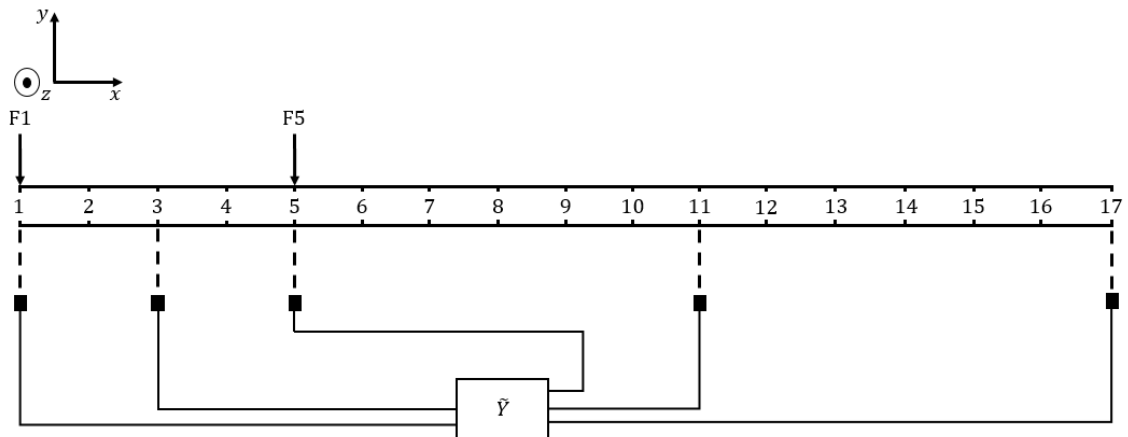


Figura 3.9 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 2.º caso.

Neste 2.º caso, havendo 3 respostas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$, considera-se a série de combinações com 1, 2 ou 3 forças. Assim, apresenta-se novamente o erro acumulado entre as respostas medidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e \mathbf{Y}_U :

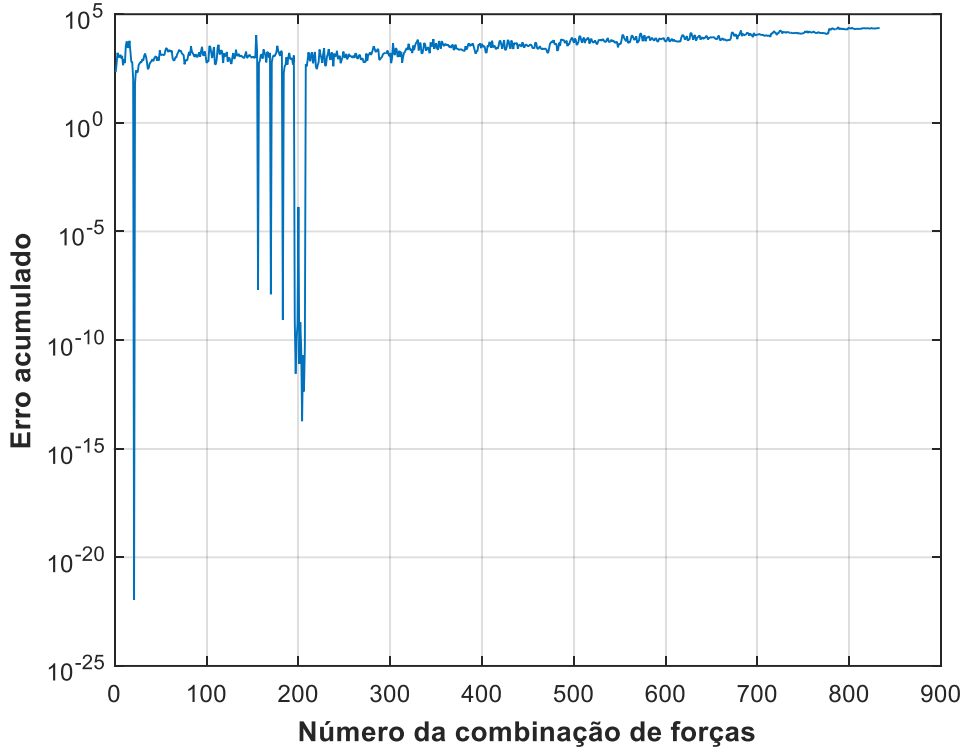


Figura 3.10 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=3$ e $\#U=2$.

Da Figura 3.10, é possível observar um mínimo absoluto do erro acumulado, indicando a combinação de forças n.º 21. Esta combinação identifica os nós 1 e 5, como as posições em que é mais provável estarem aplicadas forças. No entanto, existem outros valores mínimos relativos que tornam possível a identificação de 3 forças presentes no sistema. Isto acontece, porque todos esses mínimos relativos apresentam um grupo de coordenadas comum com as coordenadas corretas das forças. Em caso de dúvida deve-se escolher a combinação que apresente o mínimo relativo que contenha o número de posições mais pequeno.

Concluindo com o 3.º caso, estuda-se agora a hipótese em que existem mais respostas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ que $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$, de modo a verificar se existe algum efeito prejudicial quando $\#U > \#K$ que ponha a metodologia utilizada em causa. Assume-se novamente o esquema ilustrado na Figura 3.9, variando os vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_5 \ Y_{17}\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_1 \ Y_3 \ Y_{11}\}^T \quad (3.16)$$

Sabe-se, à partida, que o número de posições possíveis das forças não pode ser superior a 2 forças, pois como já foi referido $\#A \leq \#K$. Assim, considera-se a série de combinações com 1 e/ou 2 forças.

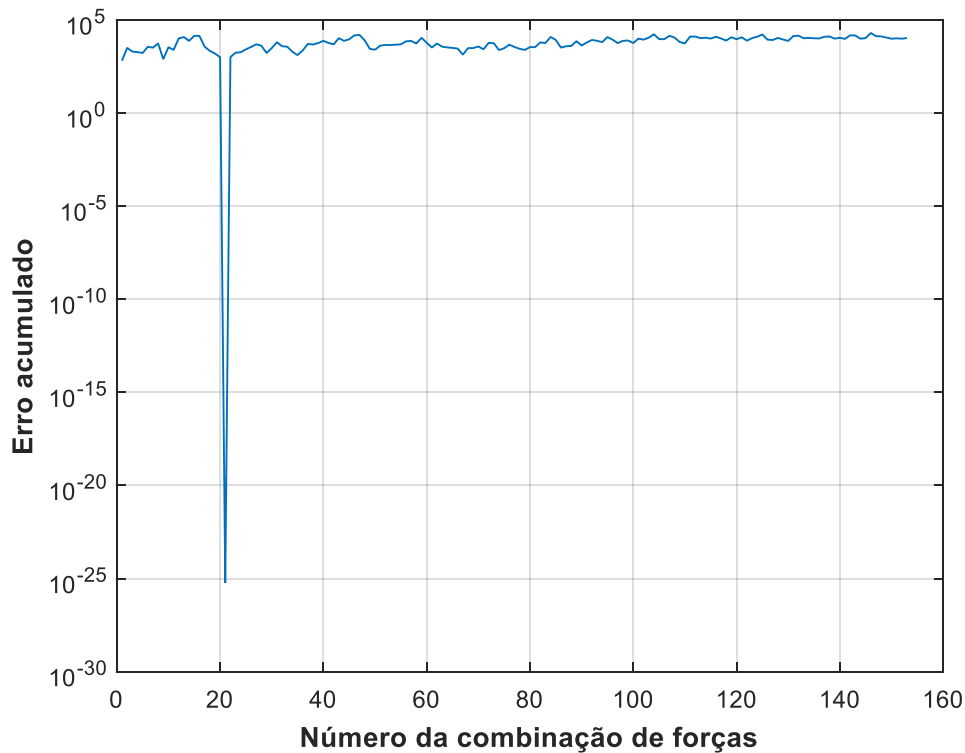


Figura 3.11 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=2$ e $\#U=3$.

Observando a Figura 3.11, é possível notar um mínimo absoluto do erro acumulado, indicando, novamente, a combinação de forças n.º 21. Esta combinação identifica os nós 1 e 5, como as posições em que é mais provável estarem aplicadas forças. Não existindo outros mínimos relativos, conclui-se que se $\#U > \#K$ em nada influencia o método utilizado para localizar e quantificar forças de natureza estática.

3.4.2 Forças constantes no domínio da frequência – Simulação 2

Nesta segunda simulação, para o mesmo modelo considerado na simulação anterior, demonstra-se como localizar e quantificar 4 forças constantes aplicadas nos nós 3, 7, 11 e 17, de uma viga em condições livre-livre, considerando 3 casos onde se utiliza:

- Caso 1. Quatro respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e uma resposta “não conhecida” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;
- Caso 2. Quatro respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e duas respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;
- Caso 3. Quatro respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e três respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$.

Estes 3 casos são estudados para verificar se, na presença de $\#K = \#A$, a utilização de 1, 2 ou mais respostas $\#U$ influencia a localização e quantificação de forças.

Assim, para o 1.º caso, considera-se os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos e o esquema da viga em condição livre-livre:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_2 \ Y_3 \ Y_5 \ Y_{17}\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_{15}\} \quad (3.17)$$

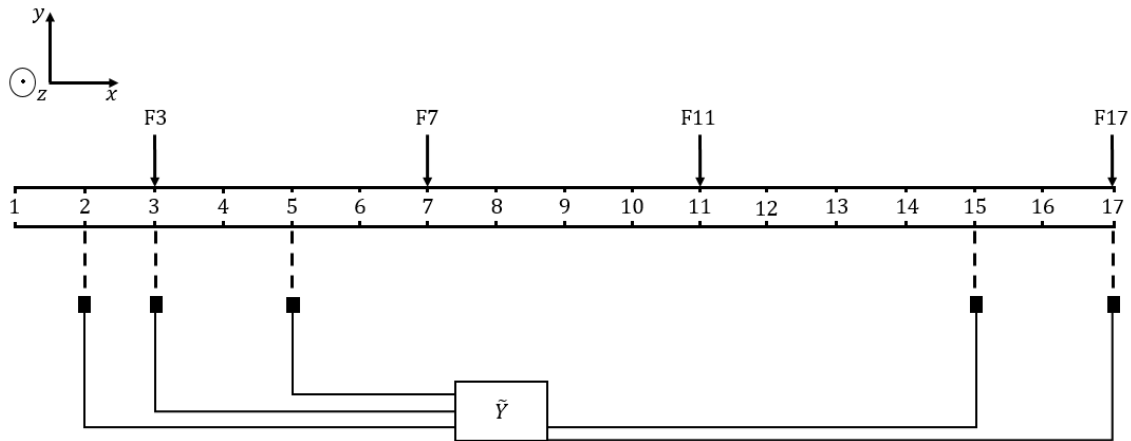


Figura 3.12 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 1.º caso.

Aplicando a metodologia utilizada na secção Forças constantes no domínio da frequência – Simulação 1, apresenta-se o erro acumulado entre as respostas medidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e \mathbf{Y}_U na Tabela 3.2:

Tabela 3.2 – Combinação com o erro mínimo absoluto, 1.º caso.

| Número da combinação | Número de forças | Posição real das forças | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|
| 2077 | 4 | 3, 7, 11, 17 | 4 | 3, 7, 11, 17 | 5.49×10^{-23} |

O método implementado identifica a combinação número 2077, correspondente às posições das forças 3, 7, 11 e 17, fortificando a sua viabilidade quando são utilizadas 4 respostas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e 1 resposta $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$. No Apêndice I, apresenta-se o gráfico do erro acumulado em função do número de combinação de forças.

Ilustrado na Figura 3.13, apresenta-se o 2.º caso. Este é muito parecido com a simulação anterior, pelo que se acrescenta uma resposta $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$. Assim, os novos vetores de resposta dinâmica são os seguintes:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_2 \ Y_3 \ Y_5 \ Y_{17}\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_{10} \ Y_{15}\}^T \quad (3.18)$$

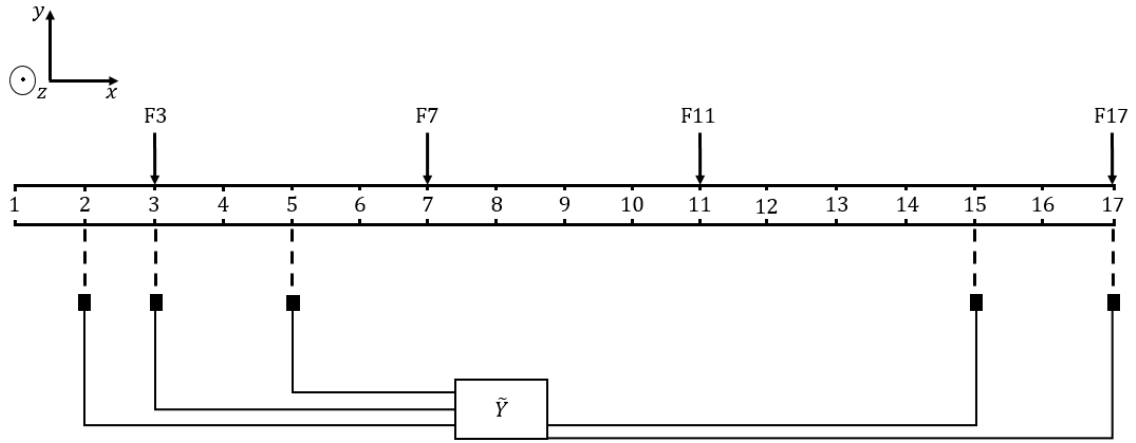


Figura 3.13 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 2.º caso.

Na Tabela 3.3, é possível observar o erro acumulado entre as respostas medidas $\tilde{\mathbf{Y}}_U$ e \mathbf{Y}_U . O algoritmo identifica a os nós 3, 7, 11 e 17 (combinação 2077) como as posições em que é mais provável estarem aplicadas forças. No Apêndice I, apresenta-se o gráfico do erro acumulado em função do número de combinação de forças.

Tabela 3.3 – Combinação com o erro mínimo absoluto, 2.º caso.

| Número da combinação | Número de forças | Posição real das forças | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|
| 2077 | 4 | 3, 7, 11, 17 | 4 | 3, 7, 11, 17 | 4.22×10^{-21} |

Segue-se o 3.º e último caso, agora considerando 3 respostas “não conhecidas” $\tilde{\mathbf{Y}}_U$. Assim, apresenta-se os novos vetores de resposta dinâmica:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_2 \ Y_3 \ Y_5 \ Y_{17}\}^T \text{ e } \tilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_4 \ Y_{10} \ Y_{15}\}^T \quad (3.19)$$

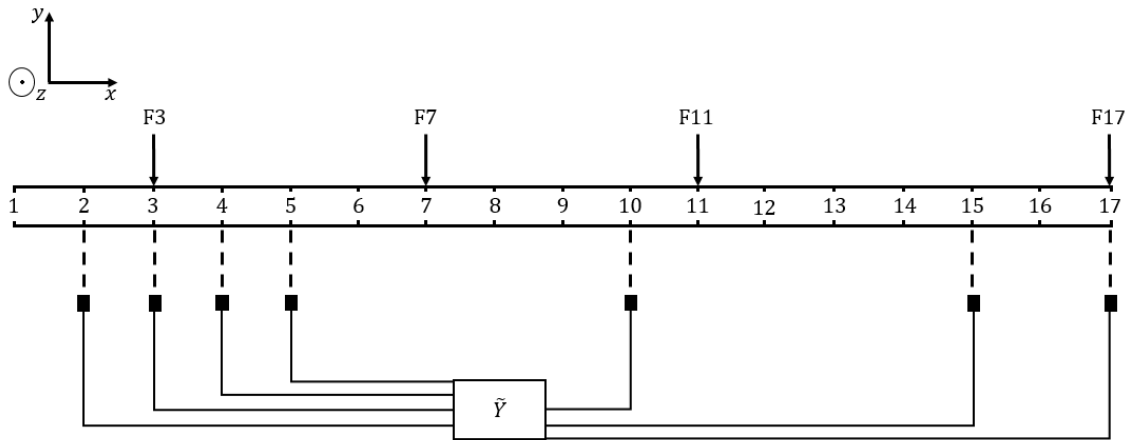


Figura 3.14 – Viga com forças aplicadas e respostas medidas para o 3.º caso.

Aplicando novamente o método de localização e quantificação de forças, calcula-se o erro acumulado entre as respostas medidas $\tilde{\mathbf{Y}}_U$ e as calculadas \mathbf{Y}_U . Observando a Tabela 3.4, verifica-se a eficácia do método, identificando um mínimo absoluto na combinação 2077, correspondendo às posições onde estão, efetivamente, forças aplicadas. O gráfico do erro acumulado em função do número de combinação de forças está presente no Apêndice I.

Tabela 3.4 – Combinação com o erro mínimo absoluto, 3.º caso.

| Número da combinação | Número de forças | Posição real das forças | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|
| 2077 | 4 | 3, 7, 11, 17 | 4 | 3, 7, 11, 17 | 9.43×10^{-23} |

Comprova-se que, na presença de $\#K = \#A$, a utilização de 1, 2 ou mais respostas $\#U$, em nada influencia o método apresentado, responsável pela localização e quantificação de forças.

3.4.3 Forças harmónicas no domínio da frequência – Simulação 1

Nesta secção, demonstra-se como localizar e quantificar forças de natureza harmónica, isto é, forças que variam a sua magnitude. Neste exemplo, representado na Figura 3.15, é utilizado o mesmo modelo considerado nas simulações anteriores, ou seja, uma viga na condição livre-livre, composta por 16 elementos e 17 nós, onde são aplicadas 1 força constante no nó 10 e 1 força harmónica (onda sinusoidal pura a 200 Hz) no nó 13:

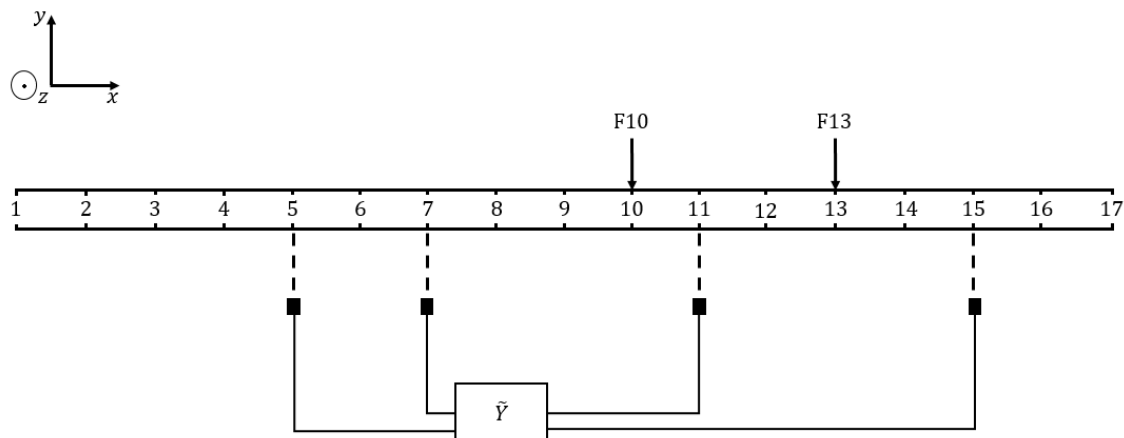


Figura 3.15 – Respostas medidas na viga, estando esta a suportar uma força estática e outra dinâmica.

Este exemplo serve para comprovar a eficácia do método de localização e quantificação utilizado nas simulações anteriores, de maneira a verificar se, com a aplicação de forças de natureza harmónica, existe algum efeito prejudicial na metodologia. Assim, os vetores de respostas dinâmicas considerados são:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_7 \ Y_{15}\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_5 \ Y_{11}\}^T \quad (3.20)$$

Calculando novamente o erro acumulado entre as respostas medidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e \mathbf{Y}_U , destaca-se um erro absoluto na combinação 128 que corresponde à posição correta das forças nos nós 10 e 13:

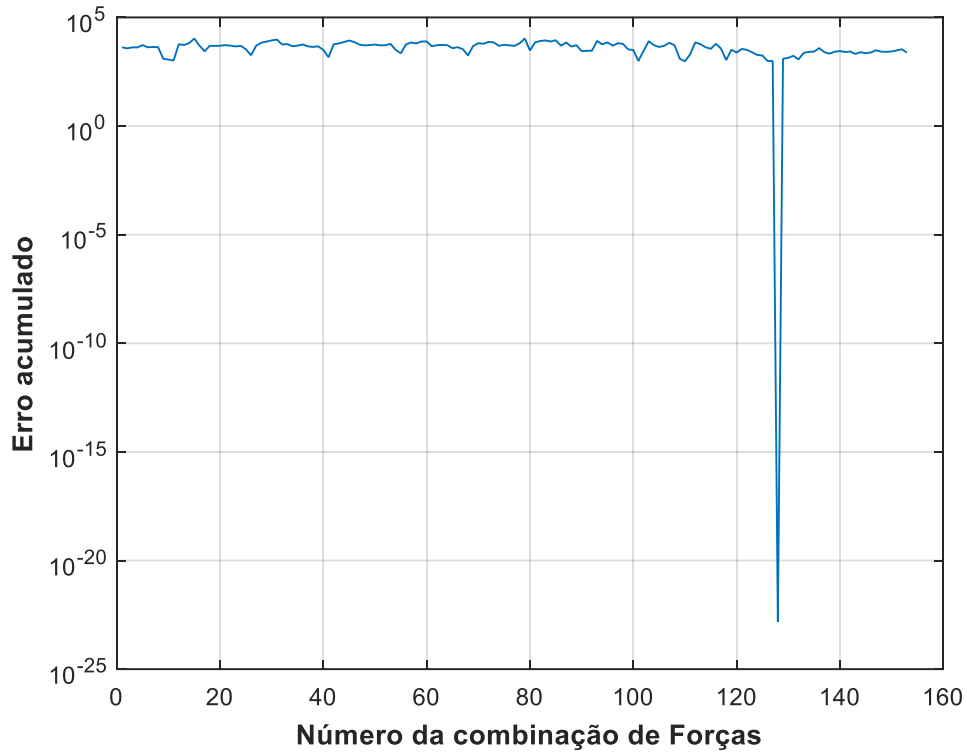


Figura 3.16 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=2 e #U=2.

Observando a Tabela 3.5, verifica-se o valor de erro acumulado para o mínimo absoluto na combinação 128 (nó 10 e 13).

Tabela 3.5 – Combinação com o erro mínimo absoluto.

| Número da combinação | Número de forças | Posição real das forças | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|
| 128 | 2 | 10, 13 | 2 | 10, 13 | 1.52×10^{-23} |

Foram ainda realizados outros dois casos onde se utiliza:

Caso 2. Três respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e uma resposta “não conhecida” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;

Caso 3. Duas respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e três respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$.

Tanto no 2.º caso, como no 3.º, o algoritmo identificou corretamente as posições mais prováveis onde são aplicadas forças (combinação n.º 128), podendo observar o gráfico do erro acumulado em função do número de combinação de forças no Apêndice II.

Confirma-se a metodologia utilizada na identificação de forças, quando estas são simultaneamente de amplitude constante e harmónica.

3.4.4 Forças harmónicas no domínio da frequência – Simulação 2

Nesta última simulação, é testada a hipótese de estarem aplicadas somente forças de natureza harmónica, considerando o mesmo modelo que nas simulações anteriores. Considera-se novamente uma viga na condição livre-livre (Figura 3.17), onde estão aplicadas duas forças nos nós 8 e 10: no nó 8, aplica-se um sinal aleatório periódico e, no nó 10, uma onda sinusoidal pura a 200 Hz.

Considerando os seguintes vetores de respostas dinâmicas, o erro acumulado entre as respostas medidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e \mathbf{Y}_U é apresentado na Figura 3.18:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_2 \ Y_5\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_{10} \ Y_{13} \ Y_{16}\}^T \quad (3.21)$$

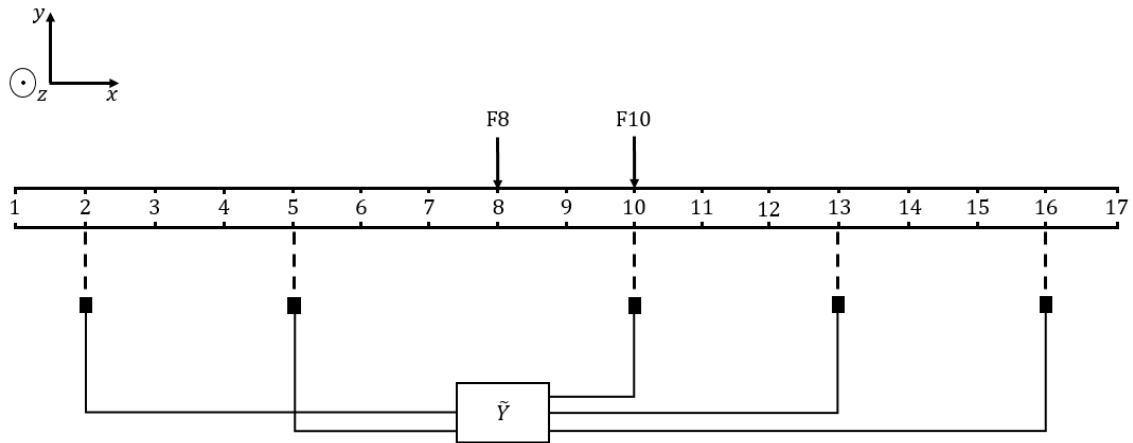


Figura 3.17 – Respostas medidas na viga, estando esta a suportar duas forças dinâmicas.

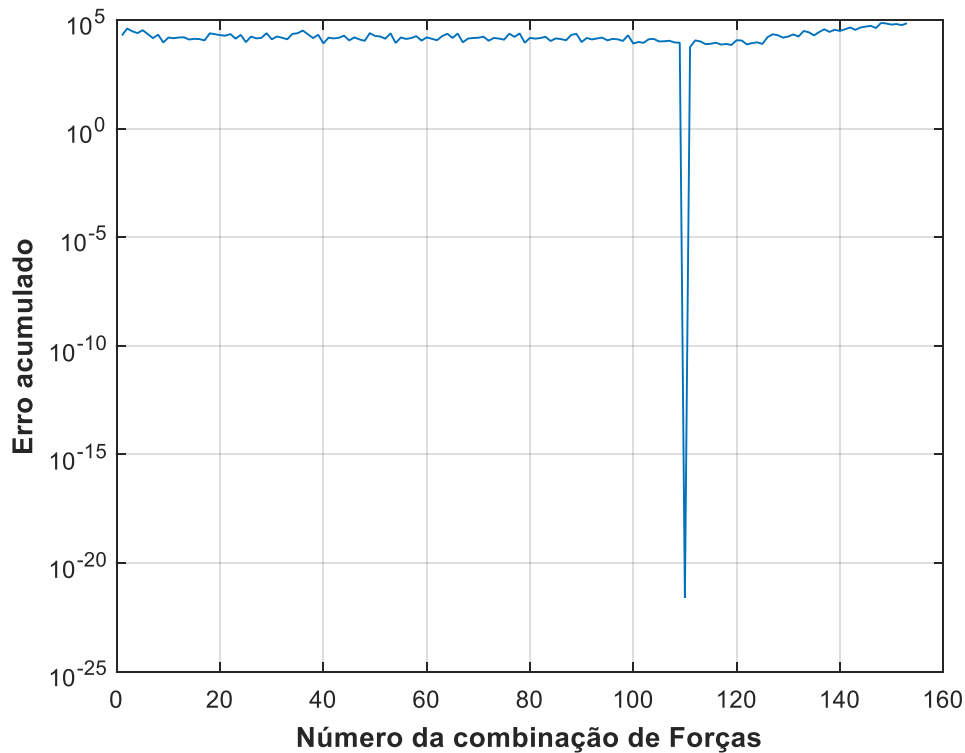


Figura 3.18 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=2 e #U=3.

O mínimo absoluto é identificado na combinação número 110, correspondendo às posições corretas das forças aplicadas na viga (nó 8 e nó 10). Mais uma vez, o método mostra-se eficaz, identificando corretamente as forças aplicadas à estrutura. Observando a Tabela 3.6, verifica-se o valor de erro acumulado para o mínimo absoluto na combinação 110

Tabela 3.6 – Combinação com o erro mínimo absoluto.

| Número da combinação | Número de forças | Posição real das forças | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|
| 110 | 2 | 8, 10 | 2 | 8, 10 | 2.51×10^{-22} |

Foram ainda realizados outros dois casos onde se utiliza:

Caso 2. Três respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e duas respostas “não conhecida” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;

Caso 3. Duas respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e duas respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$.

Tanto no 2.º caso, como no 3.º, o algoritmo identificou corretamente as posições mais prováveis onde são aplicadas forças (combinação n.º 110), podendo observar o gráfico do erro acumulado em função do número de combinação de forças no Apêndice II.

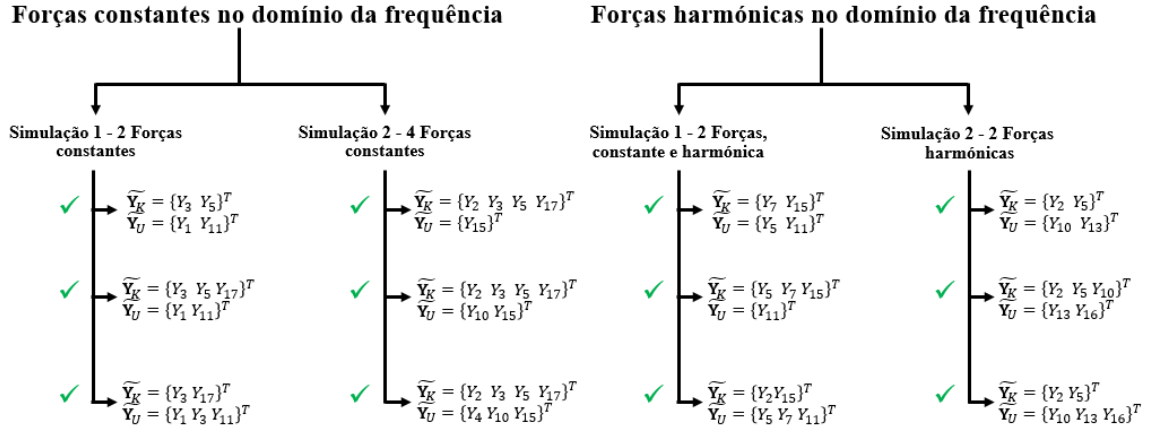


Figura 3.19 – Fluxograma de todos os casos realizados, para cada simulação.

Conclui-se que, tanto para forças de natureza constante, como harmônica, o método de localização e quantificação de forças utilizado é válido numericamente, quando aplicadas a uma viga na condição livre-livre. Observando a Figura 3.19, constata-se que em todos os casos foram identificadas corretamente as posições das forças, independentemente das respostas que se consideram conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$. e “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$.

4. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL, SENSORES DE EFEITO DE HALL

Nesta secção, pretende-se apresentar o procedimento experimental, utilizando os sensores de efeito de Hall, com o intuito de verificar a metodologia apresentada anteriormente, referente à localização, quantificação e reconstrução de forças dinâmicas, com base no conceito de transmissibilidade de deslocamentos em sistemas MGD.

É implementada uma técnica de aquisição de dados, correspondentes à resposta de deslocamento de uma estrutura sob condições livre-livre, quando a esta são aplicados diferentes tipos de excitação dinâmica. Esta técnica de aquisição é feita utilizando sensores de efeito de Hall.

Após a conceção de uma estrutura que serve de suporte dos sensores, segue-se a calibração dos mesmos. Posteriormente, é exibida a montagem experimental e apresenta-se a aquisição da resposta da estrutura quando a esta estão aplicados dois tipos de excitação dinâmica diferentes: num 1.º teste, é aplicada uma excitação por impulso através de um martelo instrumentado; no 2.º teste, é aplicada uma excitação sinusoidal utilizando um agitador eletromecânico.

Uma vez feita a aquisição das respostas dinâmicas nos dois casos, os dados provenientes de ambas as experiências são utilizados no algoritmo desenvolvido com o objetivo de localizar, quantificar e reconstruir as excitações dinâmicas aplicadas à estrutura.

4.1 Equipamento e procedimento experimental

Neste segmento, pretende-se apresentar o equipamento e material utilizado na componente experimental, bem como o procedimento necessário à sua realização, onde se focam as etapas de calibração dos sensores, as suas limitações, e toda a componente de aquisição envolvente.

4.1.1 Sensores de efeito de Hall

Como enunciado na secção Sensores de efeito de Hall, um sensor de efeito de Hall é um transdutor que, devido à variação do campo magnético, devolve uma diferença de potencial, conhecida como diferença de potencial de Hall, ou tensão de Hall. Assim, é possível calibrar o sensor e utilizá-lo na aquisição de dados relativos ao deslocamento de uma estrutura e medir a variação de deslocamento entre, por exemplo, um íman acoplado a uma estrutura e o sensor.

O sensor de efeito de Hall utilizado neste projeto é caracterizado por ser um sensor linear, ou seja, devolve um sinal analógico (contínuo no tempo) diretamente proporcional ao campo magnético que por ele passa. Na Figura 4.1 e na Tabela 4.1 é possível observar, respetivamente, a composição e descrição do tipo de sensor utilizado (*Linear Hall Effect Sensor SS49E*).

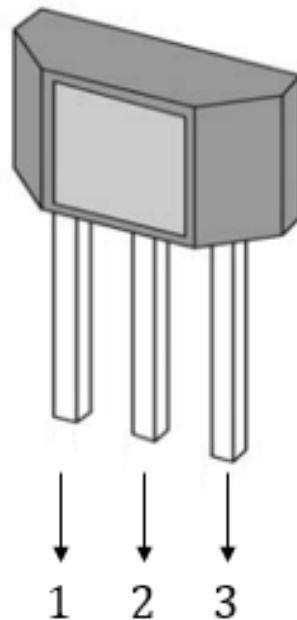


Figura 4.1 – Composição do sensor de efeito de Hall SS49E, adaptado de [29].

Tabela 4.1 – Descrição do sensor de efeito de Hall SS49E, adaptado de [29].

| Número | Nome | Descrição |
|--------|--------|-----------------------------|
| 1 | Vdd | Fonte de tensão |
| 2 | Gnd | Terra do circuito integrado |
| 3 | Output | Saída de tensão |

Os parâmetros operacionais deste tipo de sensores variam consoante o modelo. Nesta dissertação, os sensores utilizados já existiam no laboratório de Mecânica Estrutural e foram adquiridos via Internet, pelo que não é possível aceder à sua informação detalhada. No entanto,

para o modelo utilizado (SS49E), é possível consultar em [29] as características gerais, comuns a todos os sensores deste modelo. Na Tabela 4.2, é possível observar algumas das características gerais.

Tabela 4.2 – Características gerais do sensor à temperatura ambiente (25 °C), adaptado de [29].

| Parâmetro | Símbolo | Típico | Unidades |
|----------------------------|-----------|--------|-------------------|
| Fonte de tensão | V_{dd} | 5 | V – Volt |
| Saída de tensão em repouso | V_0 | 2.5 | V – Volt |
| Corrente fornecida | I_{dd} | 4.2 | mA – miliampere |
| Saída de tensão mínima | V_{out} | 0.86 | V – Volt |
| Saída de tensão máxima | V_{out} | 4.25 | V – Volt |
| Temperatura operacional | T | -40~85 | °C - Grau Celsius |

4.1.2 Ímanes

O íman é um objeto capaz de produzir um campo magnético devido à interação dos seus polos Norte e Sul. As linhas de força magnética partem do polo Norte e orientam-se no sentido do polo Sul, criando assim um campo magnético.

Os ímanes são utilizados neste projeto pois potenciam a utilização dos sensores de efeito de Hall. Uma vez acoplados à estrutura, é possível medir a variação de deslocamento desta, devido à variação do campo magnético resultante do movimento dos ímanes em relação aos sensores.

Tal como os sensores, os ímanes utilizados são provenientes do laboratório de Mecânica Estrutural, não existindo muita informação acerca dos mesmos, ainda assim, é possível assumir algumas das suas propriedades. Os ímanes em questão são compostos por neodímio, ferro e boro, integrando assim um íman com elevada força magnética, com uma massa bastante reduzida.

Foram utilizados dois tipos de ímanes na calibração dos sensores, com dimensões e classes diferentes. As classes servem para separar os ímanes consoante as suas propriedades magnéticas, nomeadamente a intensidade do campo magnético. É possível observar as classes e as respetivas propriedades magnéticas para ímanes de neodímio no Anexo II.

Na Figura 4.2, é possível visualizar os ímanes utilizados. À esquerda, é apresentado um íman (tipo 1), de classe N50, com dimensões $12 \times 3 \text{ mm}$ e com uma massa de 5 g . À direita, está exposto um íman (tipo 2), de classe N35, com dimensões $6 \times 2 \text{ mm}$ e com uma massa de 2 g .



Figura 4.2 – Ímanes de neodímio.

A utilização de cada íman está sujeita a algumas limitações e condições. Na secção da calibração dos sensores serão enunciadas, pormenorizadamente, estas limitações e condições referente à sua aplicação.

4.1.3 Estrutura de suporte e fixação

Como referido anteriormente, a estrutura em estudo é uma viga sob condições livre-livre, tal como ilustrado na Figura 4.3. Uma vez acoplados os ímanes à viga, foi necessário projetar uma estrutura que suportasse os sensores, permitindo assim a aquisição da resposta da viga.

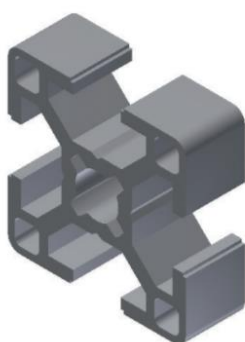


Figura 4.3 – Viga sob condições livre-livre.

Assim sendo, com o auxílio de *software* CAD, foram projetadas várias estruturas que servissem de suporte aos sensores, cujo protótipo escolhido se encontra ilustrado na Figura 4.4. Foi utilizado perfil de alumínio, com as dimensões apresentadas na Figura 4.5.



Figura 4.4 – Vista da estrutura, utilizando software CAD.



| Referência | 63101WMH30X30 |
|------------|----------------------|
| I_x | 2,70 cm ⁴ |
| I_y | 2,70 cm ⁴ |
| W_x | 1,80 cm ³ |
| W_y | 1,80 cm ³ |
| Superfície | 2,90 cm ² |
| Massa | 0,80 kg/m |

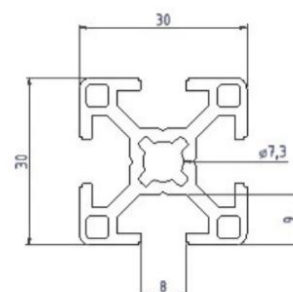
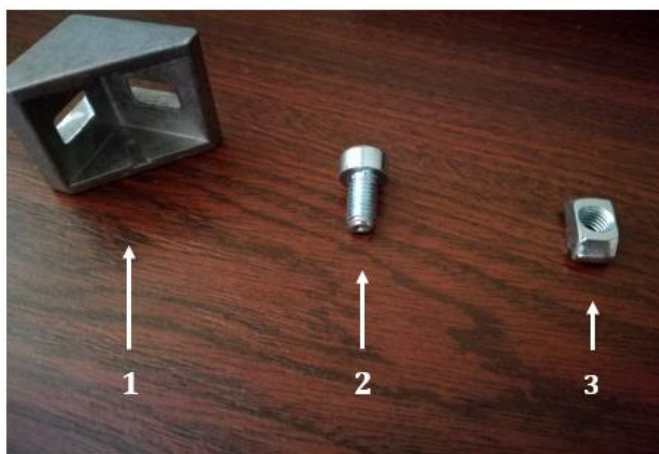


Figura 4.5 – Dimensões do perfil Bosch, adaptado de [30].

Foram utilizadas várias peças para se construir a estrutura, nomeadamente cantos, parafusos e porcas (Figura 4.6). Utilizou-se uma serra elétrica da faculdade que permitisse cortar o perfil em troços (Figura 4.7), para que posteriormente fosse possível construir a estrutura. Os cantos servem para unir os diferentes troços e formar a estrutura apresentada na Figura 4.8.



| Número | Descrição |
|--------|-----------|
| 1 | Canto |
| 2 | Parafuso |
| 3 | Porca |

Figura 4.6 – Cantos, parafusos e porcas de fixação.



Figura 4.7 – Utilização de uma serra elétrica no corte do perfil de alumínio..



Figura 4.8 – Estrutura de suporte aos sensores.

Para fixar os sensores à estrutura anteriormente enunciada, foi necessário projetar uma peça que permitisse suportar os sensores e fixá-los à estrutura. Recorrendo mais uma vez a *software* CAD, foi elaborada uma peça, ilustrada na Figura 4.9, que cumprisse os requisitos anteriormente enunciados. Recorrendo a uma impressora 3D (Figura 4.10), foi possível fabricar a peça e, utilizando os mesmos parafusos e porcas que na Figura 4.6, mostrou-se eficaz o seu acoplamento à estrutura (Figura 4.11).

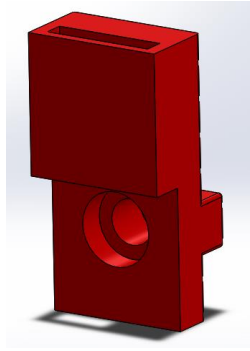


Figura 4.9 – Vista CAD do suporte do sensor.

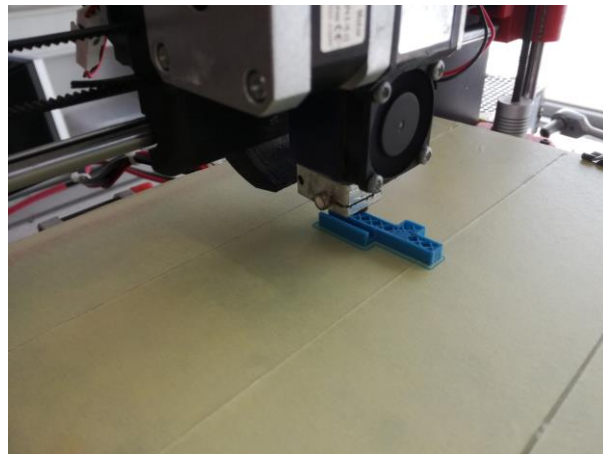


Figura 4.10 – Impressão 3D do suporte.

O material utilizado neste processo de impressão 3D é um polímero, denominado por PLA, e toma a forma de um fio ($\varnothing = 1,75 \text{ mm}$) que vem enrolado em bobines. Este fio é puxado pela impressora e é fundido a uma temperatura de $200 \text{ }^{\circ}\text{C}$, que depois sai por um bocal (*nozzle*) com um diâmetro de $\varnothing = 0,4 \text{ mm}$. Posteriormente, o material é depositado numa base, criando sucessivas camadas, até que a peça inicialmente projetada, esteja concluída.



Figura 4.11 – Fixação do suporte dos sensores à estrutura.

4.1.4 Calibração dos sensores

Os sensores de efeito de Hall devolvem uma diferença de potencial proporcional ao campo magnético emitido pelos ímanes. Este campo magnético emitido pelos ímanes é sempre constante, no entanto, as linhas de força magnética que passam pelo sensor variam com a distância deste e do íman, sendo que esta distância não é diretamente proporcional à tensão de Hall devolvida pelo sensor. Devido ao facto de, entre cada sensor existirem pequenas variações na leitura do campo magnético, foi necessária a calibração de 8 sensores para 8 ímanes do tipo 1 e 8 ímanes do tipo 2, de maneira a construir a curva que devolve a distância entre o sensor e o íman, em função da tensão de Hall medida.

Numa primeira fase, foram calibrados os sensores para os ímanes do tipo 2. Para isso ser possível, foi necessário instrumentar os 8 sensores de modo a ligá-los à placa de aquisição e adquirir os dados necessários. É possível observar a instrumentação de um destes sensores ligado ao módulo de aquisição NI-9205 (Figura 4.12), estando este acoplado ao chassis de aquisição NI cDAQ-9172 (Figura 4.13).

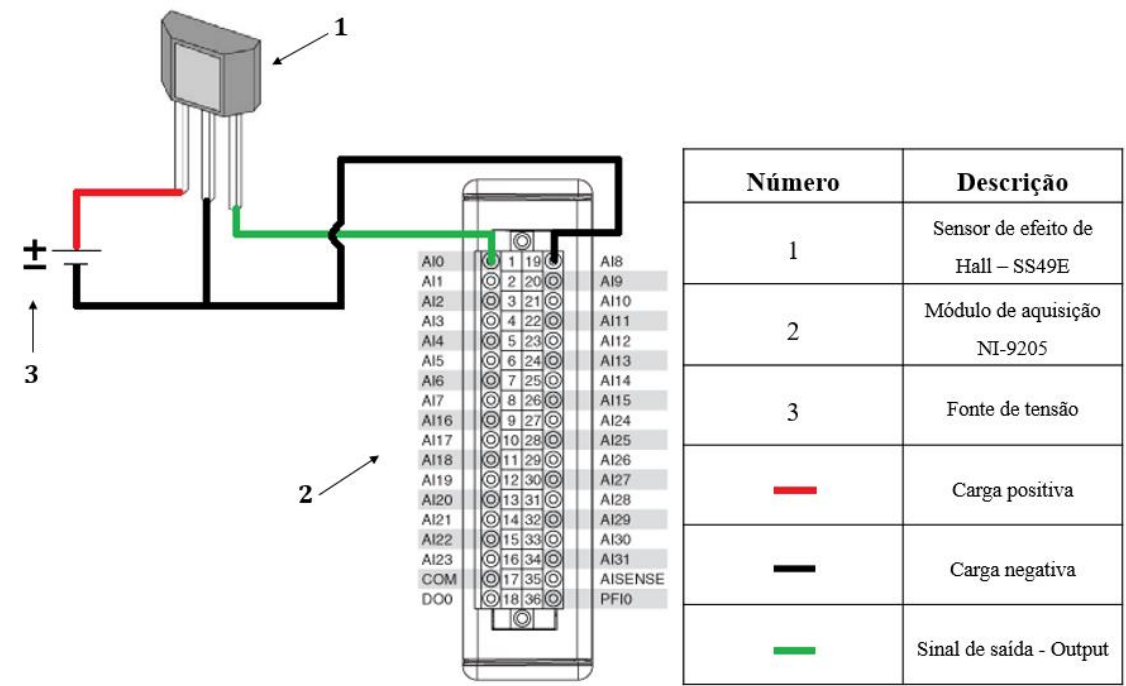


Figura 4.12 – Instrumentação de um sensor para efeito de calibração.

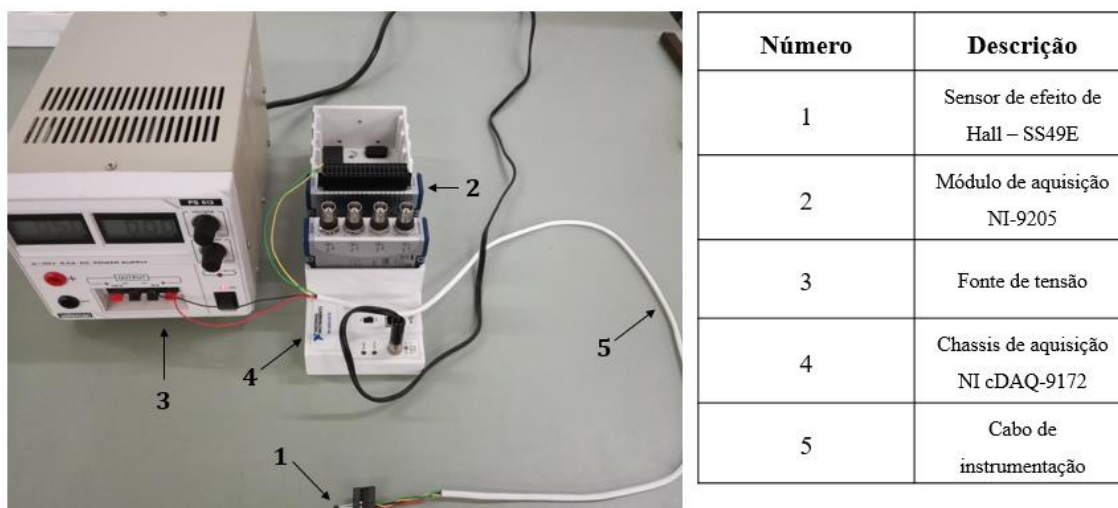


Figura 4.13 – Instrumentação de um sensor.

Recorrendo à utilização do *software* LabVIEW⁴, utilizou-se um programa de Osciloscópio para realizar a calibração de cada sensor para cada íman. Consoante a distância entre o íman e o sensor, é registada a correspondente diferença de tensão de Hall e, no final da calibração, é construída a curva de calibração de cada sensor para cada íman. O *setup* experimental desta calibração pode ser observado na Figura 4.14.

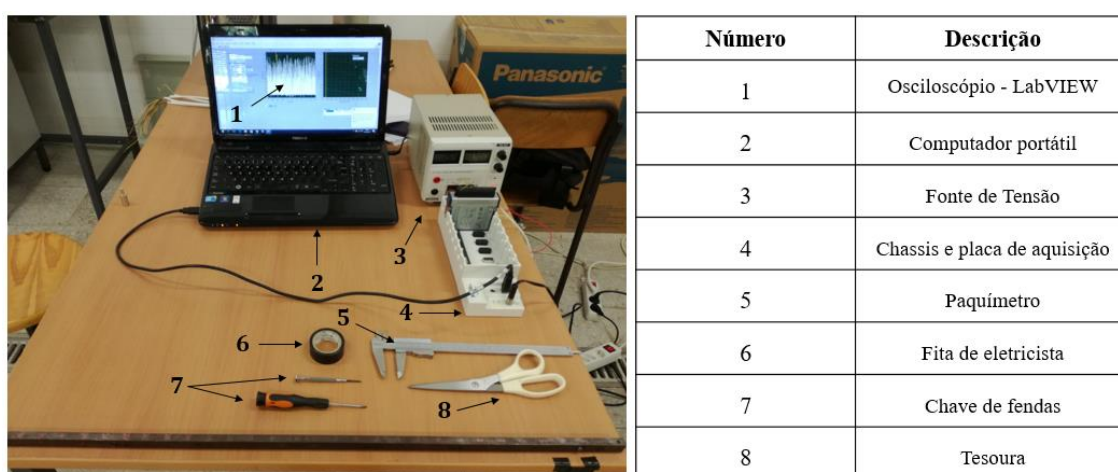
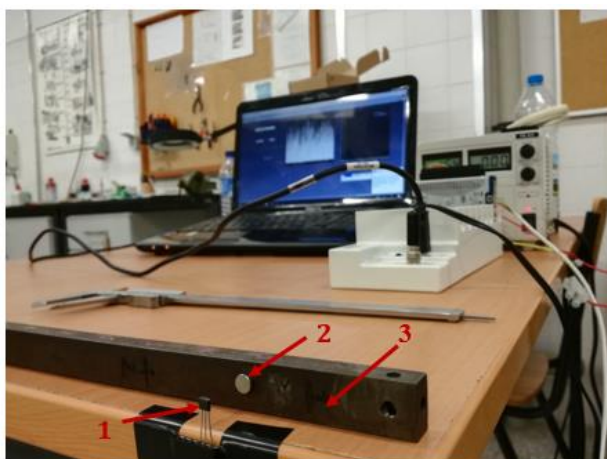


Figura 4.14 – 1.ª calibração, *setup* experimental utilizando ímanes do tipo 2.

Na Figura 4.15, é possível observar uma vista mais pormenorizada do método de aquisição e calibração dos sensores e os seus respetivos ímanes. Foi nesta fase que surgiram as primeiras dificuldades e condicionantes de todo o procedimento experimental realizado. Esta foi a 3.ª tentativa implementada para que fosse possível calibrar os sensores com sucesso.

⁴ Software de engenharia de sistemas criado especificamente para aplicações que envolvam teste, medição e controle [40].



| Número | Descrição |
|--------|----------------------------|
| 1 | Sensor de efeito de Hall |
| 2 | Íman |
| 3 | Estrutura de estudo – Viga |

Figura 4.15 – 1.^a calibração, vista pormenorizada.

De modo a enquadrar as condicionantes experimentais deste estudo, serão enunciadas especificamente na secção experimental em que foram encontradas. Assim sendo, é importante expor algumas conjunturas desta calibração:

- O sensor não pode estar em contacto com qualquer material ferromagnético, pois influencia a tensão de Hall por ele devolvida;
- O sensor e o íman devem estar alinhados na sua calibração e posterior utilização, o seu desalinhamento influencia o sinal de saída do sensor;
- A variação da tensão de Hall devolvida pelo sensor é bastante sensível a curtas distâncias, pelo que, todos os sensores devem ser posicionados de igual modo, favorecendo assim a coerência da sua leitura, quando utilizados para o método proposto.

Com base na sensibilidade dos sensores face às forças magnéticas provenientes dos ímanes, foi estabelecida uma gama de valores correspondentes à distância entre os dois. Dentro dessa gama de valores, a variação da distância de cada medição não é constante, pois quanto mais o íman se aproxima do sensor, maior é a variação da tensão de Hall. O limite superior foi estabelecido nos 28 mm , pois é abaixo desta distância que o sensor começa a captar a interferência das linhas de força magnética provenientes do íman. Devido ao nível de saturação do sensor, o limite inferior foi escolhido nos 7 mm . Na Figura 4.16, é possível ver uma das oito curvas de calibração obtidas, estando as restantes presentes no Apêndice III.

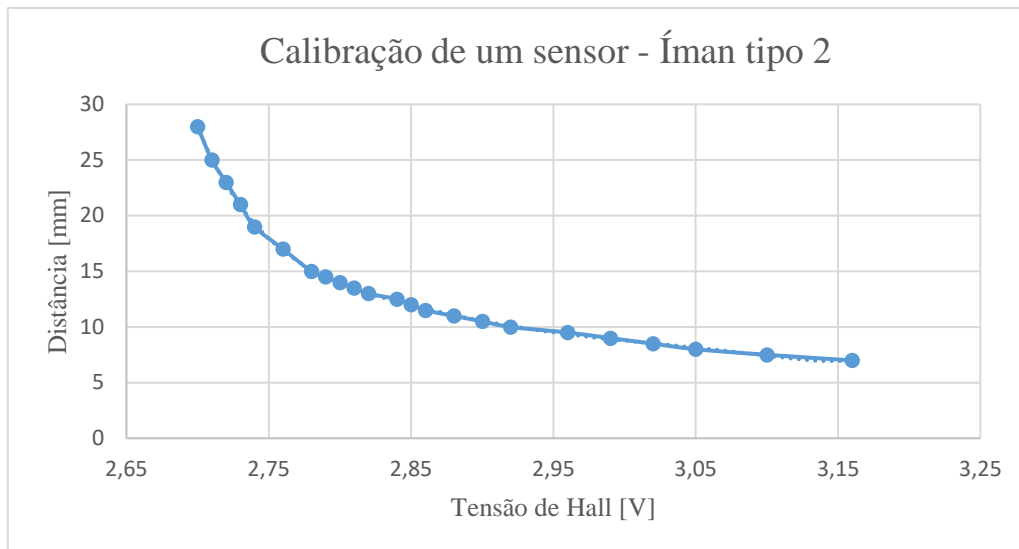


Figura 4.16 – Curva de calibração, íman tipo 2.

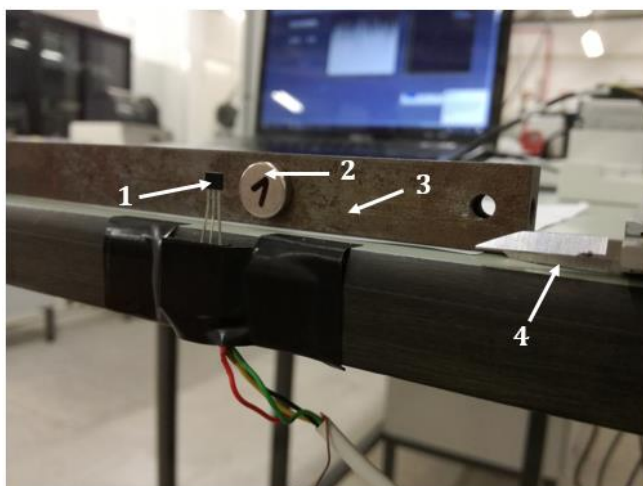
Na Figura 4.16. é possível observar o gráfico que representa a distância (d_2) entre o sensor e o íman do tipo 2 em função da tensão de Hall (V). Os valores registados foram interpolados pelo seguinte polinómio

$$\begin{aligned}
 d_2(V) = & 46115.06782V^6 - 819898.82176V^5 + 6072095.14468V^4 \\
 & - 23976795.43029V^3 + 53240921.30942V^2 \\
 & - 63035085.54706V + 31088272.77304
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo assim possível adquirir os dados da oscilação da estrutura em 21 mm. A função (4.1) foi obtida recorrendo à ferramenta Excel, sendo uma função polinomial de 6.º grau com um coeficiente de determinação $R^2 = 0.99951$.

Após a calibração dos sensores com os ímanes do tipo 2, foram adquiridos os ímanes do tipo 1. Como referido anteriormente, o íman do tipo 1 é de classe N50, isto significa que a extensão do seu campo magnético é maior que o íman do tipo 2. Assim sendo, ao utilizar estes novos ímanes, é possível adquirir dados da estrutura, quando a amplitude de oscilação for maior.

Esta nova calibração, utilizando os ímanes do tipo 1, segue o mesmo procedimento que os ímanes do tipo 2, isto é, são calibrados 8 sensores para 8 ímanes, e a calibração de cada par é feita individualmente (sem outros ímanes acoplados à estrutura). Na Figura 4.17, é possível observar uma vista mais pormenorizada deste procedimento, dando especial atenção ao tamanho deste novo íman.



| Número | Descrição |
|--------|----------------------------|
| 1 | Sensor de efeito de Hall |
| 2 | Íman |
| 3 | Estrutura de estudo – Viga |
| 4 | Paquímetro |

Figura 4.17 – 2.^a calibração, íman do tipo 1.

Apesar destes novos ímanes contribuírem significativamente na amplitude de aquisição de dados da estrutura, existem algumas desvantagens:

- Há que ter atenção ao número de elementos em que se divide inicialmente a estrutura. No decorrer da aquisição da resposta da estrutura, quando nela forem aplicadas excitações exteriores, se colocarmos 2 ímanes em 2 nós consecutivos, é aconselhável que a distância entre os nós seja o suficiente para que os ímanes não adulterem a leitura dos sensores já calibrados. Devido ao poder do seu campo magnético, estes ímanes podem interferir na leitura de outros sensores que estejam próximos;
- A sensibilidade destes ímanes é consideravelmente maior que os anteriores, pelo que é necessário elevado rigor no decorrer da calibração;
- Durante a calibração, as condições para cada par sensor-íman devem ser as mesmas, especialmente no que toca às suas posições. Os ímanes devem estar acoplados a meio da viga e os sensores alinhados com o seu centro.

Nesta 2.^a calibração, tal como na 1.^a, foi estabelecida uma gama de valores correspondentes à distância entre o sensor e o íman. Dentro dessa gama de valores, a variação da distância de cada medição também não é constante. O limite superior foi estabelecido nos 38 *mm*, pois é abaixo desta distância que o sensor começa a captar a interferência das linhas de força magnética provenientes do íman. Devido ao nível de saturação do sensor, o limite inferior foi fixado nos 10 *mm*.

Na Figura 4.18, é possível observar uma das oito curvas desta nova calibração, estando as restantes presentes no Apêndice IV.

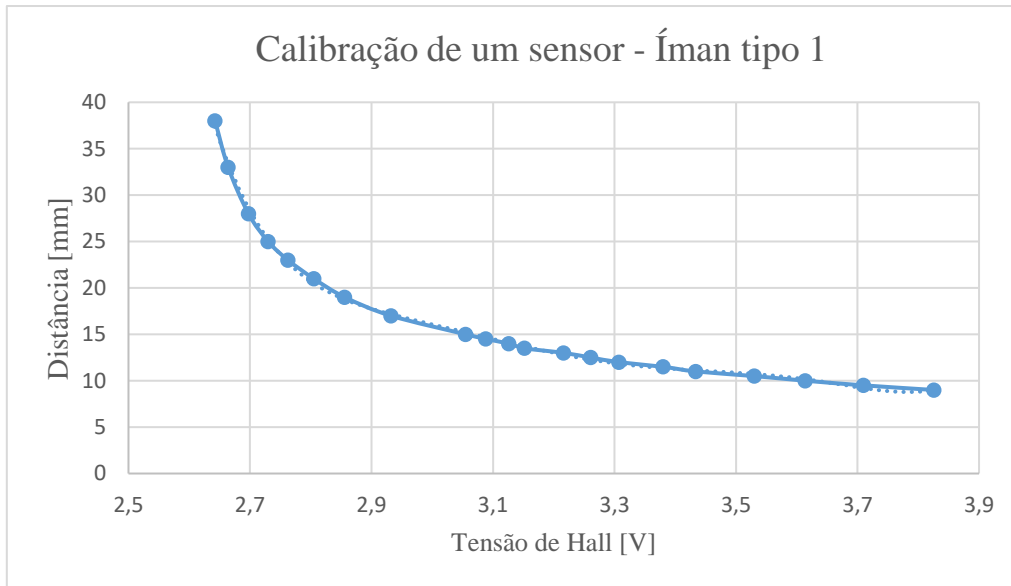


Figura 4.18 – Curva de calibração, íman tipo 1.

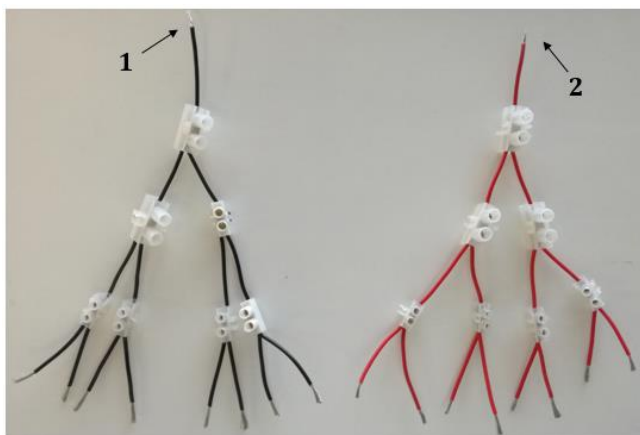
O gráfico acima representa a distância (d_1) entre o sensor e o íman do tipo 1 em função da tensão de Hall (V). Os valores registados foram interpolados pelo seguinte polinómio

$$\begin{aligned}
 d_1(V) = & 440.24110V^6 - 8728.27099V^5 + 71936.43923V^4 \\
 & - 315481.28446V^3 + 776505.41950V^2 \\
 & - 1019110.68214V + 553976.52932
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

conseguindo assim adquirir dados da estrutura quando esta tem uma amplitude de oscilação de 28 mm . A função (4.2) foi adquirida recorrendo à ferramenta Excel, sendo uma função polinomial de 6º grau com um coeficiente de determinação $R^2 = 0.99856$.

Ambas as calibrações descritas anteriormente foram bem conseguidas. No entanto, de modo a realizar a aquisição da resposta da estrutura face a excitações dinâmicas exteriores com mais rigor, foi realizada uma 3.ª calibração. Esta última conta agora com a utilização da estrutura que suporta os sensores.

Tanto para a nova calibração, como para os testes, é necessária uma fonte de tensão que sirva para todos os sensores. Assim, foi construída uma ligação em Y que permitisse a alimentação até 8 sensores.

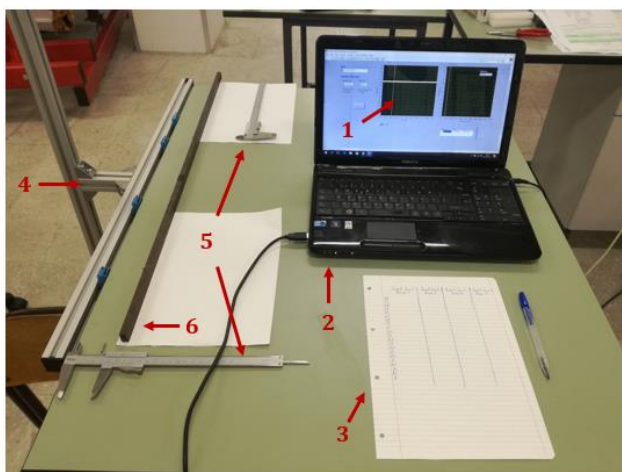


| Número | Descrição |
|--------|-------------------|
| 1 | Terminal negativo |
| 2 | Terminal positivo |

Figura 4.19 – Ligações em Y à fonte de tensão.

Os terminais 1 e 2 ilustrados na Figura 4.19, ligam diretamente à fonte de tensão de laboratório (Figura 4.14 Número-3) e, sendo uma ligação em paralelo, é possível fornecer a mesma tensão a quaisquer sensores que estejam a ser utilizados. Foram utilizados os dados de junção como ligação, de modo a promover a independência das ligações no decorrer das experiências, isto é, se o utilizador quiser apenas alimentar 2 sensores, pode retirar as outras ligações e assim poupar algum espaço no local de trabalho.

Foi decidido que nos testes a realizar se iria avaliar a resposta em deslocamento de 4 nós, bem como se iriam utilizar, única e exclusivamente, os ímanes do tipo 1. Assim, foram calibrados, simultaneamente, 4 sensores para 4 ímanes (Figura 4.20).

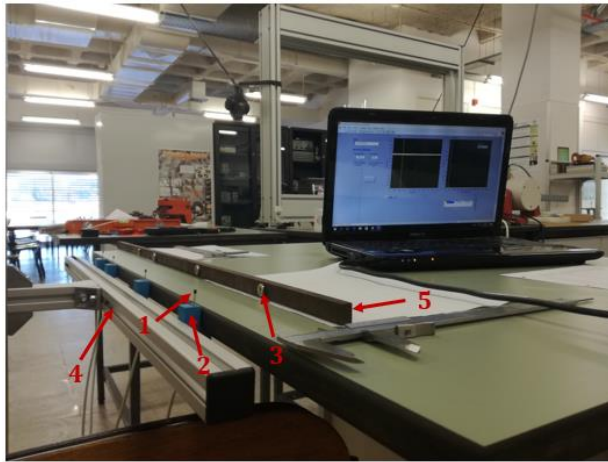


| Número | Descrição |
|--------|-----------------------------------|
| 1 | Osciloscópio - LabVIEW |
| 2 | Computador portátil |
| 3 | Folha de registo |
| 4 | Estrutura de suporte dos sensores |
| 5 | Paquímetro |
| 6 | Viga |

Figura 4.20 – 3ª. calibração, setup experimental utilizando ímanes do tipo 1.

Desta maneira, é possível melhorar a coerência entre os sensores calibrados. Os valores de distância onde se registaram as tensões de Hall são os mesmos que na 2.ª calibração: o limite superior foi estabelecido nos 38 mm; e o limite inferior foi fixado nos 10 mm. Na Figura 4.21, é possível observar, detalhadamente, o conjunto que inclui a estrutura de suporte e de fixação,

juntamente com o sensor, viga e íman. Os gráficos que contêm as curvas de calibração referentes aos 4 sensores podem ser encontrados no Apêndice V.



| Número | Descrição |
|--------|-----------------------------------|
| 1 | Sensor de efeito de Hall |
| 2 | Suporte de fixação dos sensores |
| 3 | Íman |
| 4 | Estrutura de suporte dos sensores |
| 5 | Viga |

Figura 4.21 – 3.ª calibração, vista detalhada.

4.2 Testes de aquisição

Pretende-se agora testar a aquisição da resposta da estrutura quando a esta estão aplicados dois tipos de excitação dinâmica diferentes: no 1.º teste, é aplicada uma excitação por impulso, através de um martelo instrumentado; no 2.º teste, é aplicada uma excitação sinusoidal utilizando um agitador eletromecânico (*shaker*).

Uma vez feita a aquisição das respostas dinâmicas nos dois casos, os dados provenientes de ambas as experiências são utilizados no algoritmo projetado com o objetivo de identificar as excitações dinâmicas aplicadas à estrutura.

4.2.1 Teste 1 – Excitação por impulso

Esta secção apresenta o estudo da resposta em translação de uma viga suspensa por dois cabos, quando a esta é aplicada uma excitação por impulso, utilizando um martelo instrumentado. Com a aquisição da resposta em deslocamento da viga, pretende-se, numa 1.ª fase, localizar e quantificar as forças nela aplicadas. Completando a 1.ª etapa, proceder-se-á à reconstrução do vetor carregamento.

Para adquirir e tratar os dados de resposta em deslocamento da viga, foi necessária a utilização de *hardware* da National Instruments e a criação de um instrumento virtual recorrendo ao *software* LabVIEW. Este instrumento virtual é criado à base de programação, utilizando o sistema de diagrama de blocos e possibilitando, assim, o controlo e modelação do sinal de entrada conforme o utilizador desejar, bem como alguns parâmetros de aquisição (n.º de sensores ligados, frequência de aquisição, entre outros).

O sinal entra no sistema de diagrama de blocos como sendo a tensão de Hall devolvida por cada sensor que estiver a ser utilizado. Seguidamente, o sinal é transformado de tensão de Hall para distância, recorrendo às funções de interpolação a partir das curvas de calibração. Com o deslocamento da viga, e dos ímanes nela acoplados, é feita a passagem deste deslocamento do domínio do tempo para o domínio de frequência, utilizando um bloco que realiza a Transformada de Fourier. Posteriormente, os valores de deslocamento são guardados num ficheiro de texto (formato “.txt”) sob a forma de real e imaginário, para mais tarde serem utilizados no algoritmo de localização, quantificação e reconstrução já implementado em Matlab. Na Figura 4.22, é possível observar a sequência de operações desenhada para este ensaio.

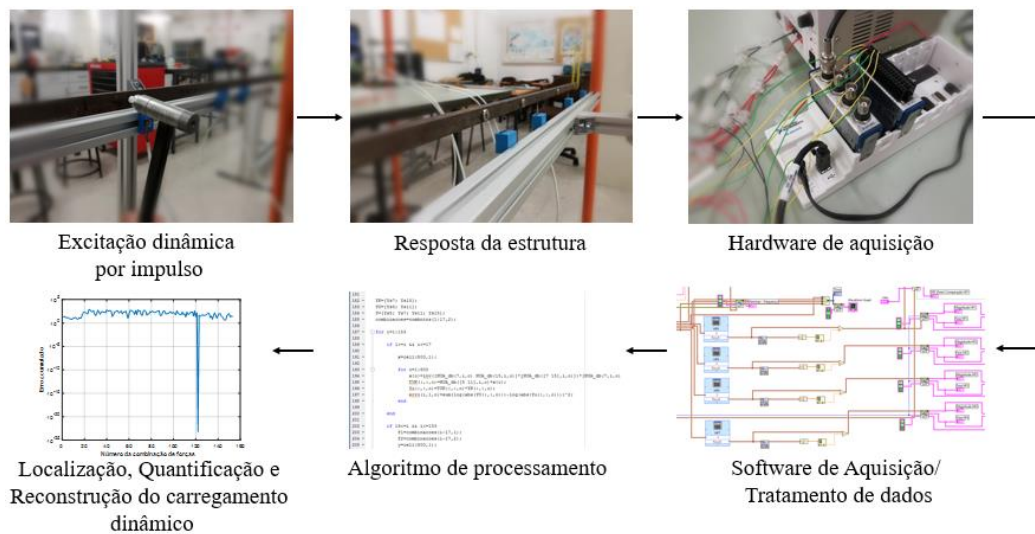


Figura 4.22 – Sequência de operações, Teste 1.

Neste teste, a força será aplicada no nó 13 e serão medidas 4 respostas dinâmicas nos nós 5, 7, 11 e 15, como ilustrado na Figura 4.23. Na Figura 4.24, é possível observar a montagem experimental deste teste.

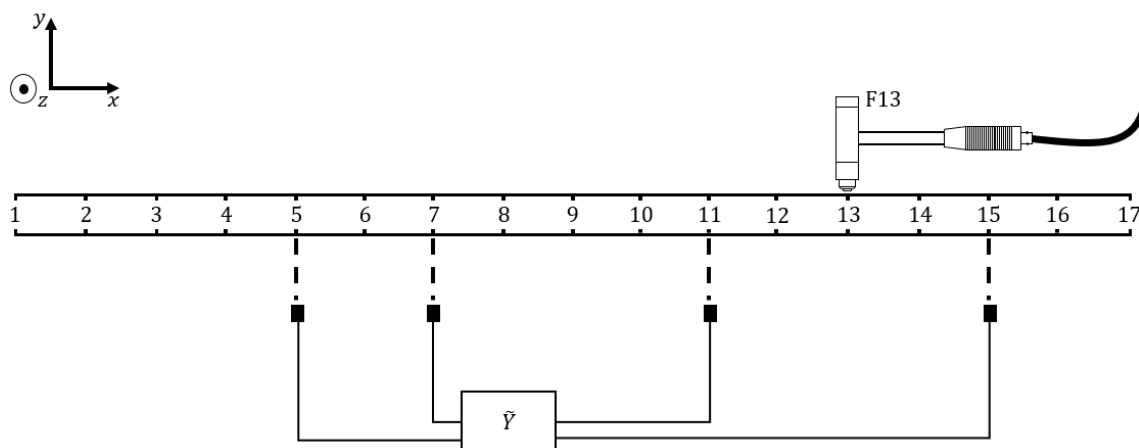


Figura 4.23 – Ilustração da viga submetida a uma excitação por impulso no nó 13, medindo 4 respostas dinâmicas.

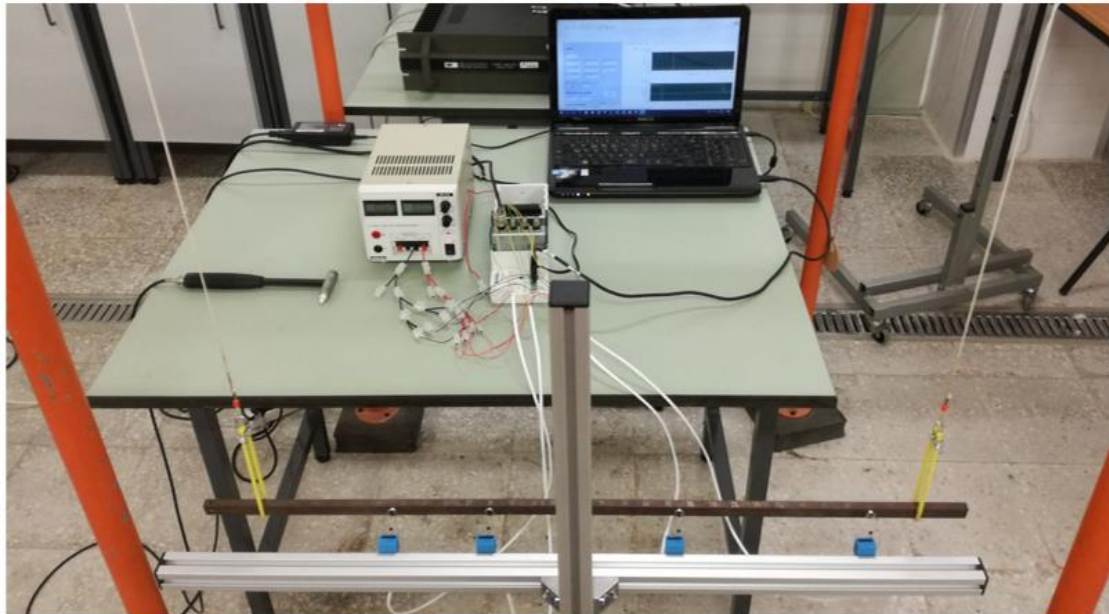


Figura 4.24 – Montagem experimental, Teste 1.

Serão considerados 2 casos de estudo, onde se utilizam:

- Caso 1. Duas respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e duas respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;
 Caso 2. Três respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e uma resposta “não conhecida” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$.

No 1.º caso, começa-se por assumir os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_7 \ Y_{15}\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_5 \ Y_{11}\}^T \quad (4.3)$$

Da Figura 4.25 à Figura 4.28, é possível observar o espectro do deslocamento adquirido.

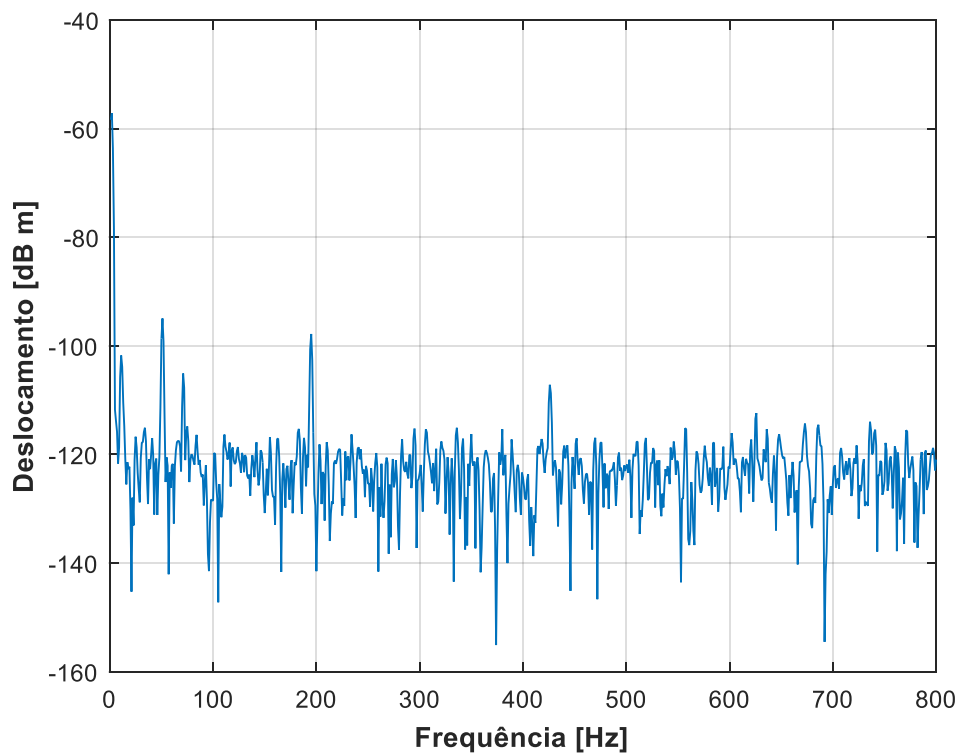


Figura 4.25 – Espectro do deslocamento no nó 5.

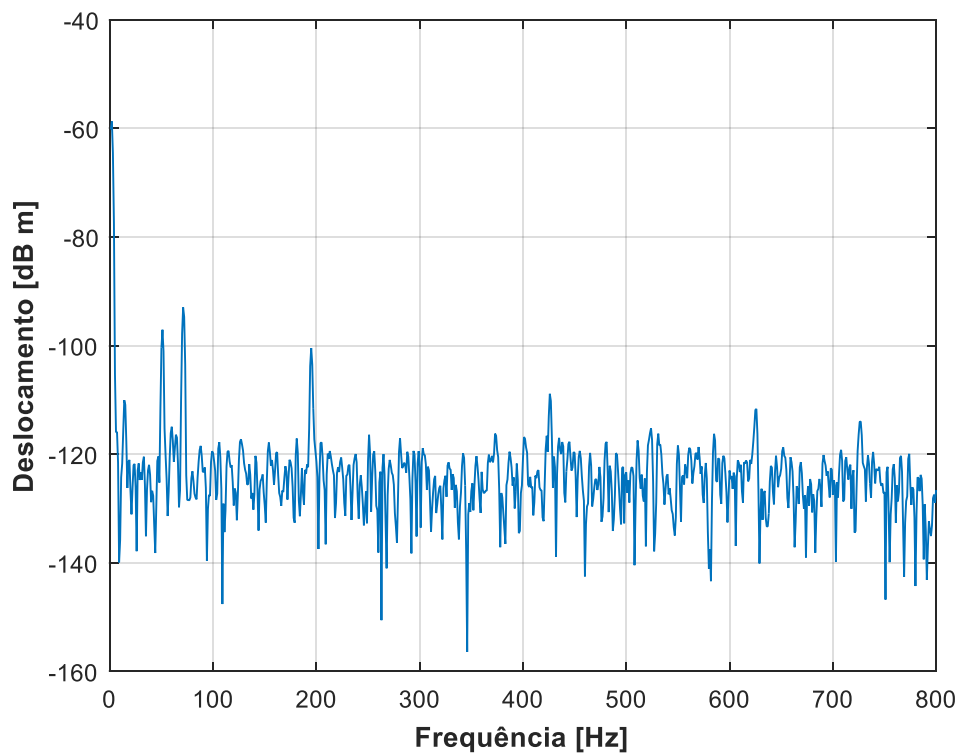


Figura 4.26 – Espectro do deslocamento no nó 7.

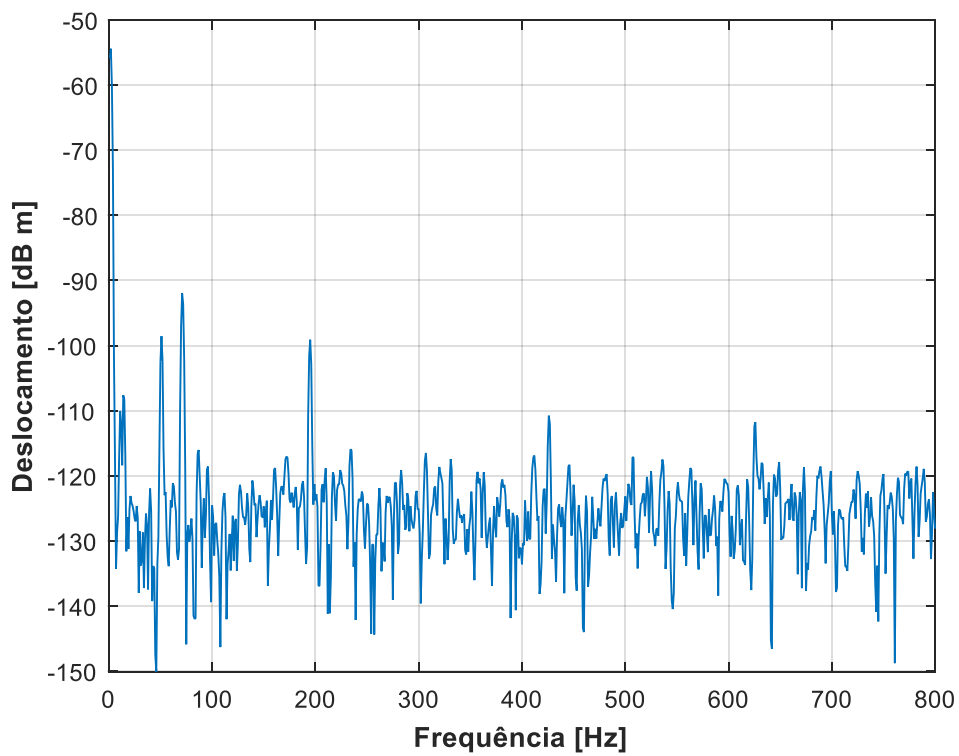


Figura 4.27 – Espectro do deslocamento no nó 11.

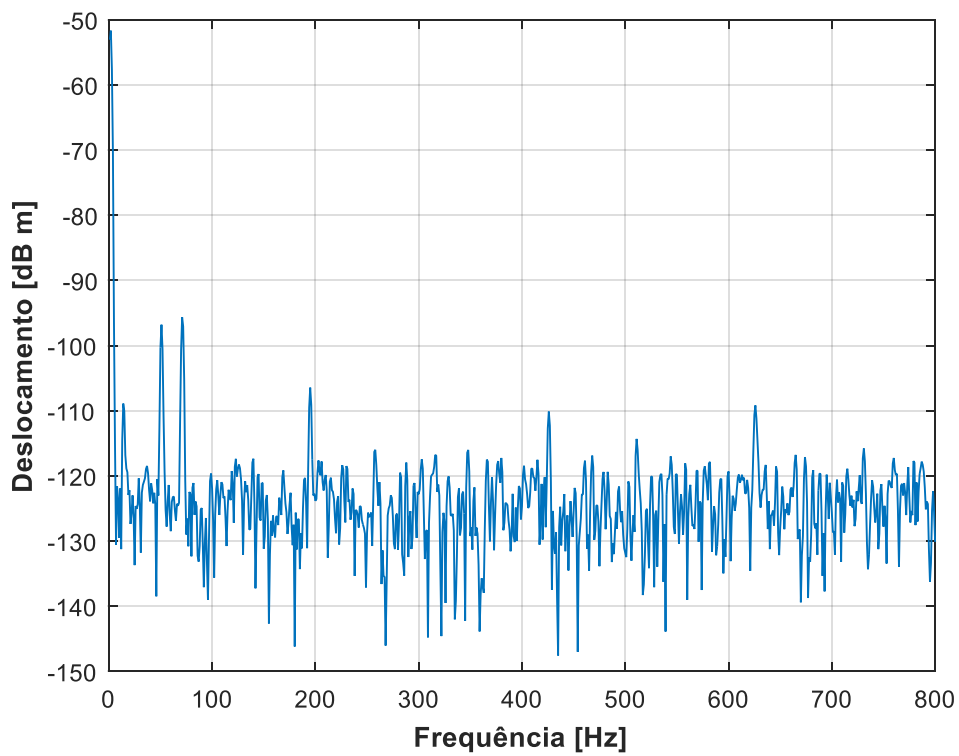


Figura 4.28 – Espectro do deslocamento no nó 15.

Observando os espectros anteriores, seria de esperar conseguir observar os picos das primeiras frequências naturais da viga. Em todos os gráficos, são visíveis dois picos próximos das primeiras duas frequências naturais: a 1.^a a 72.68 Hz e a 2.^a a 200.32 Hz. No entanto, estão presentes, em todos, picos de ressonância que não conferem com os da viga, como por exemplo a 50 Hz e a 425 Hz. Além do referido anteriormente, é observável ruído em todos os espectros.

Com estes resultados, é possível constatar a falta de qualidade na obtenção de resposta, em deslocamento, por parte destes sensores. Os sensores mostram ser sensíveis na medição de grandes amplitudes de deslocamento, presentes no modo de corpo rígido, não conseguindo detetar as pequenas amplitudes presentes nos modos de corpo flexível, no intervalo de frequências excitado. Não obstante, estas respostas são de seguida utilizadas no algoritmo projetado para a identificação de forças dinâmicas aplicadas à viga.

O número de posições possíveis das forças não pode ser superior a 2 forças, pois considera-se que conhecemos 2 respostas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$, e assim $\#A \leq \#K$. Neste seguimento, considera-se a série de combinações com 1 e/ou 2 forças. Recorrendo à transmissibilidade de deslocamentos, é aplicado o método da localização e quantificação de forças, calculando o erro acumulado (Figura 4.29) entre as respostas medidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e as calculadas \mathbf{Y}_U .

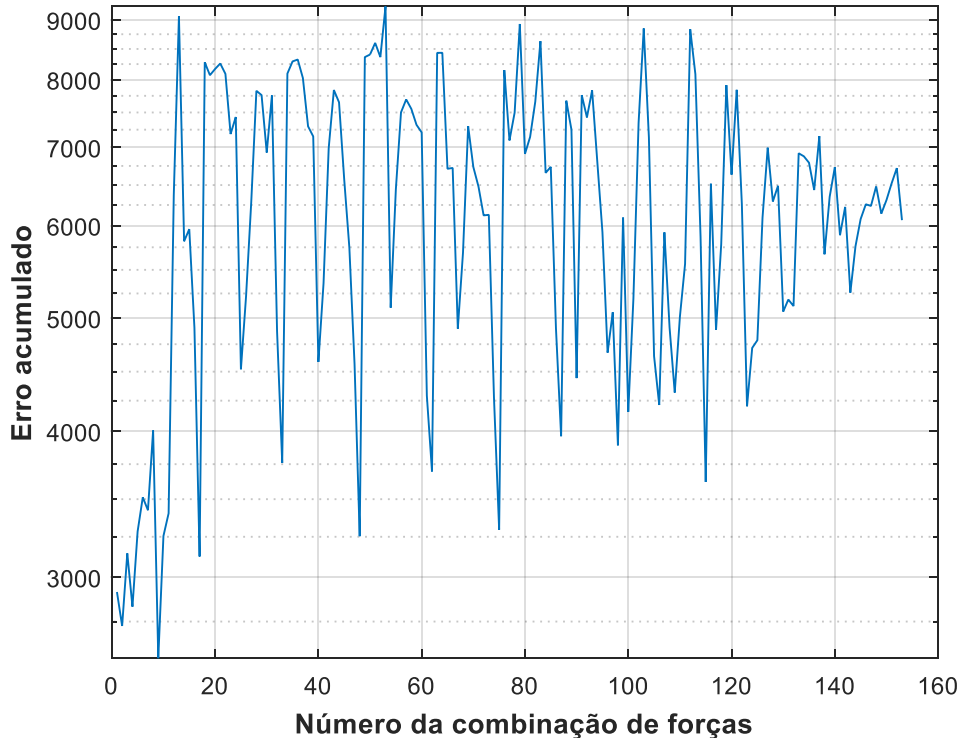


Figura 4.29 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=2$ e $\#U=2$.

Analisando a Figura 4.29, é possível observar um mínimo absoluto do erro acumulado, indicando a combinação número 9 (nó 9) como a posição onde a força pode estar a ser aplicada, o que mostra estar incorreto. Na Tabela 4.3, é possível observar as combinações que apresentam os menores erros.

Tabela 4.3 – Combinações com os menores erros, 1.º caso.

| Número da combinação | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|--------------------------------|------------------------|---------------|
| 9 | 1 | 9 | 2558.47 |
| 17 | 1 | 17 | 3126.13 |
| 48 | 2 | 2,17 | 3253.78 |
| 75 | 2 | 4,17 | 3295.99 |
| 115 | 2 | 8,15 | 3621.11 |

O algoritmo calculou o nó 9 como sendo a posição onde a força possa estar aplicada. Sabendo que a reconstrução do vetor carregamento resulta da multiplicação da matriz pseudo-inversa de receptância (numérica) pelo vetor de respostas dinâmicas medidos, então:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_y^+ \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{Bmatrix} H_{5,9} \\ H_{7,9} \\ H_{11,9} \\ H_{15,9} \end{Bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_5 \\ \tilde{Y}_7 \\ \tilde{Y}_{11} \\ \tilde{Y}_{15} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Na Figura 4.30, é possível observa a comparação entre a força real, aplicada no nó 13, e a reconstruída no nó 9.

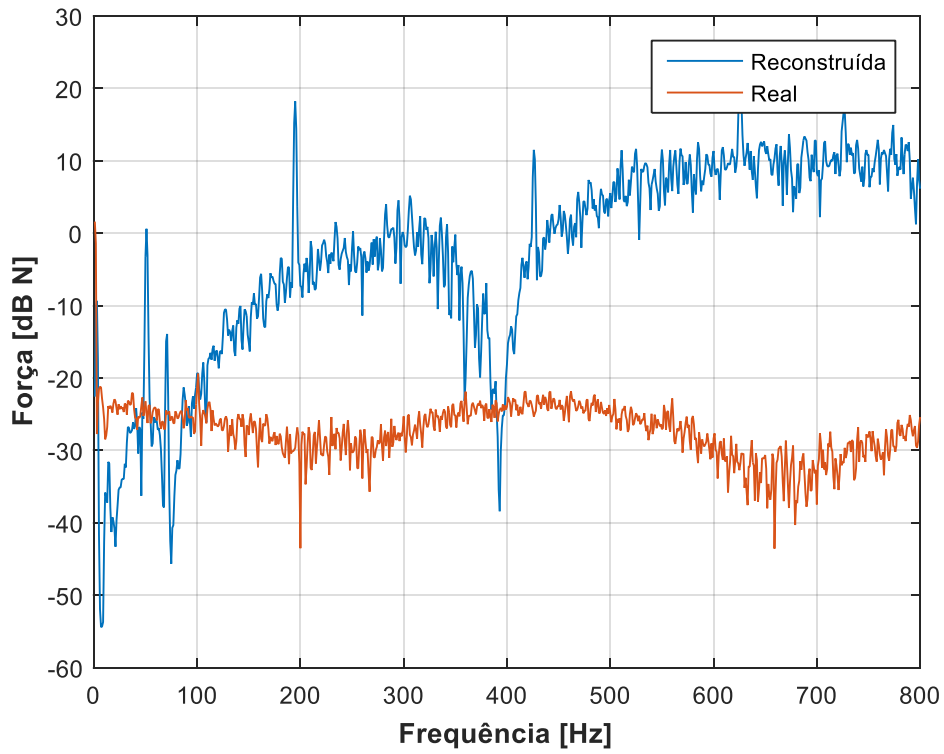


Figura 4.30 – Comparação entre a força real aplicada no nó 13 e a reconstruída no nó 9.

Segue-se o 2.º caso em análise, onde são consideradas conhecidas 3 respostas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e 1 “não conhecida” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$, havendo a possibilidade de estarem aplicadas à estrutura 3 forças ($\#A \leq \#K$). Sabendo previamente que a força está aplicada apenas no nó 13, na Figura 4.31, apresenta-se o resultado proveniente do algoritmo, assumindo os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_5 \ Y_7 \ Y_{11}\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_{15}\}^T \quad (4.5)$$

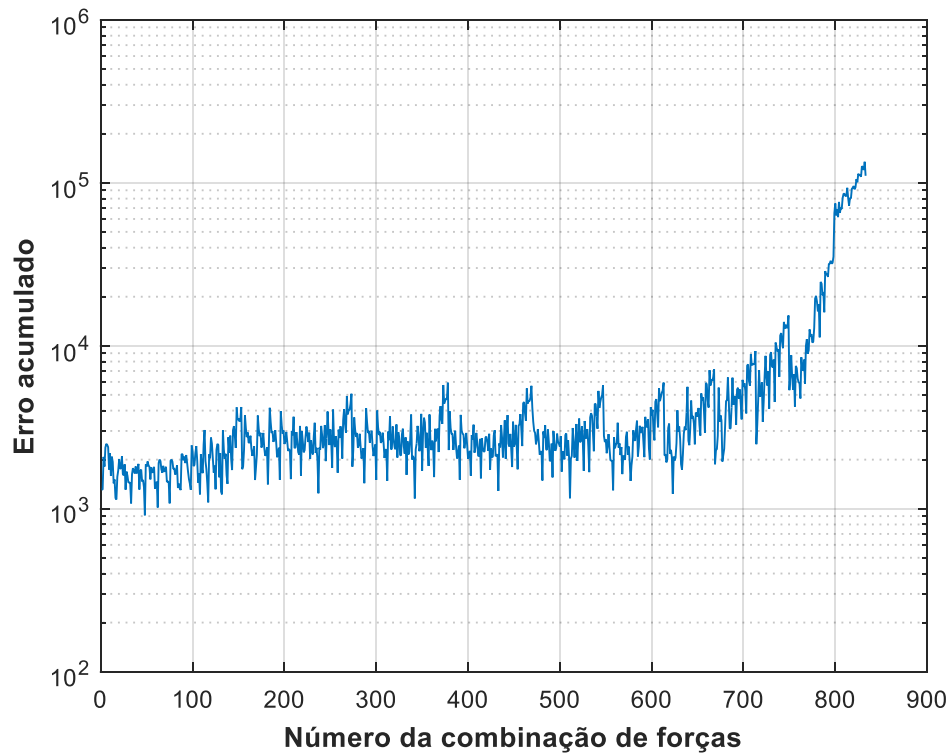


Figura 4.31 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=3$ e $\#U=1$.

Analisando a Figura 4.31, é possível observar que não há nenhum mínimo que se destaque. No entanto, o mínimo absoluto do erro acumulado indica os nós 2 e 17 (combinação 48) como as posições em que é mais provável estarem aplicadas forças, o que mostra estar incorreto. Na Tabela 4.4, é possível observar as combinações que apresentam os menores erros, destacando-se a presença constante do nó 17.

Tabela 4.4 – Combinações com os menores erros, 2.º caso.

| Número da combinação | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|--------------------------------|------------------------|---------------|
| 17 | 1 | 17 | 1139.05 |
| 33 | 2 | 1,17 | 1077.51 |
| 48 | 2 | 2,17 | 910.51 |
| 62 | 2 | 3,17 | 1017.24 |
| 75 | 2 | 4,17 | 1078.21 |

O algoritmo calculou os nós 2 e 17 como sendo as posições onde possam estar aplicadas forças. Sabe-se que a reconstrução do vetor carregamento resulta na seguinte multiplicação

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_y^+ \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} H_{5,2} & H_{5,17} \\ H_{7,2} & H_{7,17} \\ H_{11,2} & H_{11,17} \\ H_{15,2} & H_{15,17} \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_5 \\ \tilde{Y}_7 \\ \tilde{Y}_{11} \\ \tilde{Y}_{15} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

e, assim sendo, apresentam-se as forças reconstruídas nos nós 2 e 17 (Figura 4.32), e a comparação individual com a força real aplica no nó 13 (Figura 4.33 e Figura 4.34).

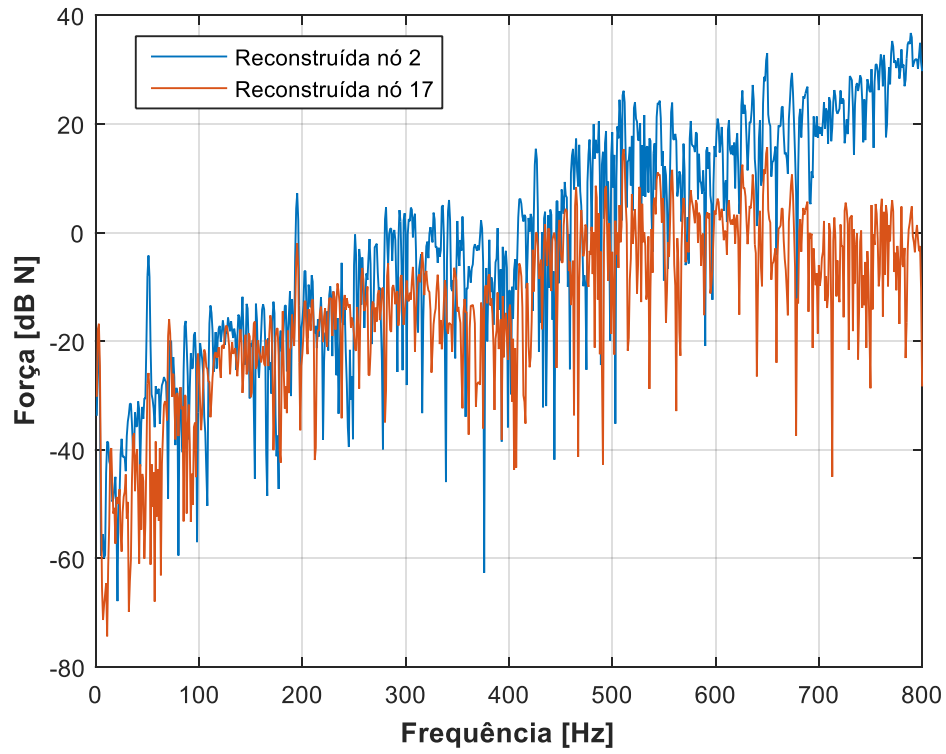


Figura 4.32 – Forças reconstruídas nos nós 2 e 17.

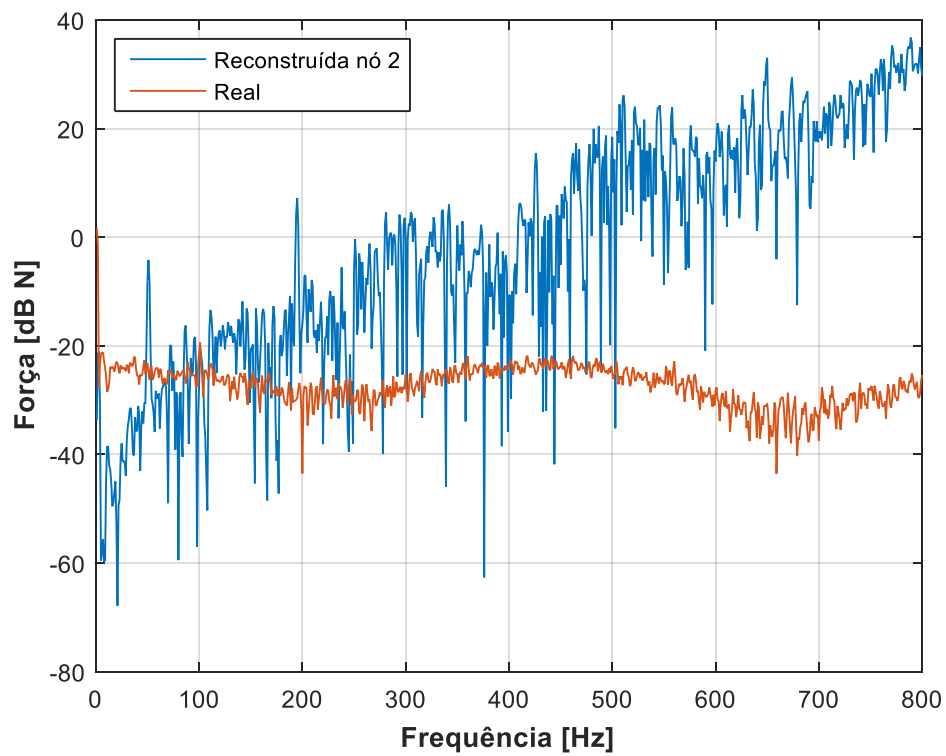


Figura 4.33 – Comparação entre a força real aplicada no nó 13 e a reconstruída no nó 2.

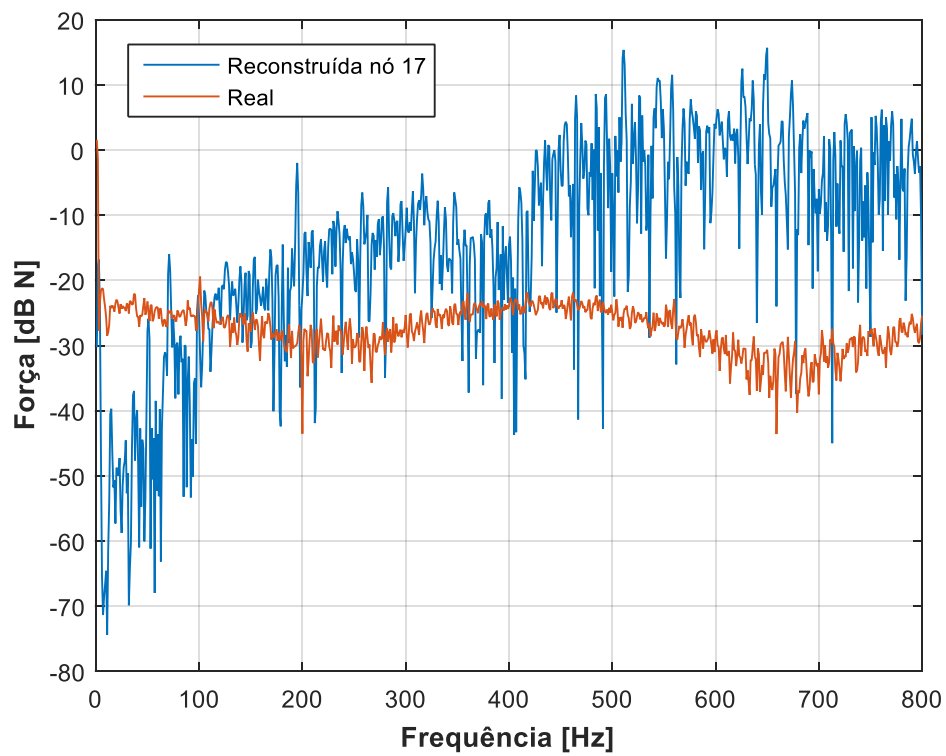


Figura 4.34 – Comparação entre a força real aplicada no nó 13 e a reconstruída no nó 17.

Com base nos resultados obtidos anteriormente, tanto para o 1.º como o 2.º caso, não foi possível localizar, quantificar nem reconstruir a força efetivamente aplicada. Este resultado pode advir tanto da falta de qualidade das respostas de deslocamento medidas, como do *software* de aquisição criado que as realiza.

4.2.2 Teste 2 – Excitação por *shaker*

Pretende-se agora estudar a resposta em translação de uma viga suspensa por dois cabos, quando a esta é aplicada uma excitação sinusoidal utilizando um agitador eletromecânico (*shaker*). Devido a experiências anteriores, a prioridade neste teste é conseguir localizar e quantificar as forças que estão aplicadas à viga. Alcançando esse objetivo com sucesso, proceder-se-á à reconstrução das forças.

A excitação consiste na geração de uma onda sinusoidal (com frequência de 68 Hz, perto da 1.ª frequência natural da viga) a partir do gerador de sinal HP 3311 e monitorizada pelo frequencímetro HP 5315A. Posteriormente, o sinal é amplificado pelo amplificador PA7D da Wilcoxon Research e transmitido à viga, sob a forma de vibração mecânica, recorrendo ao agitador eletromecânico Brüel & Kjaer 4809. No Apêndice VI, é possível observar alguns dos novos aparelhos utilizados neste teste. Na Figura 4.35, é possível observar a sequência de operações desenhada para este ensaio.

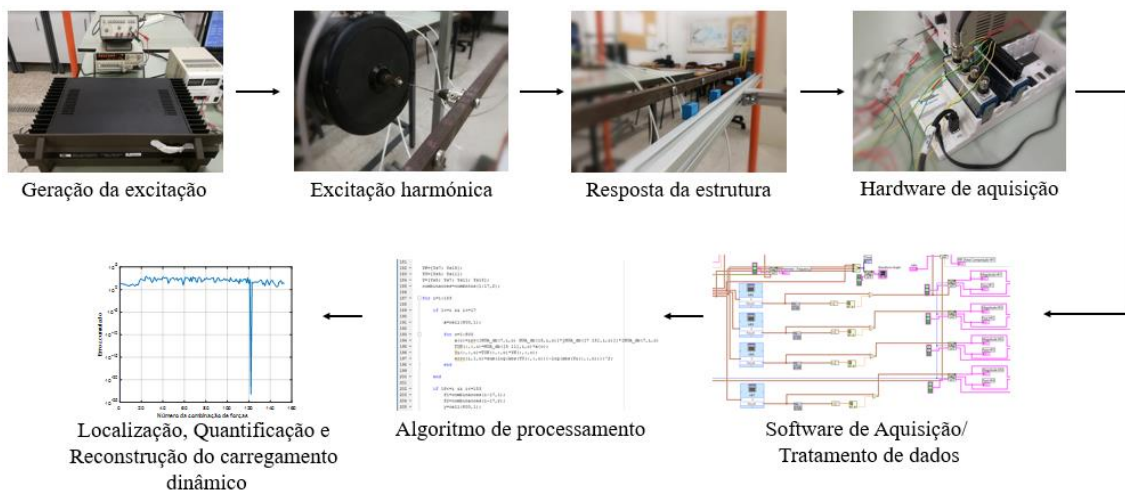


Figura 4.35 – Sequência de Operações, Teste 2.

Neste teste, a força será aplicada no nó 8 e serão medidas 4 respostas dinâmicas nos nós 5, 7, 11 e 15, como ilustrado na Figura 4.36. A ligação entre o agitador eletromecânico e a viga é feita a partir de um tirante rígido. Na Figura 4.37, é possível observar a montagem experimental deste teste.

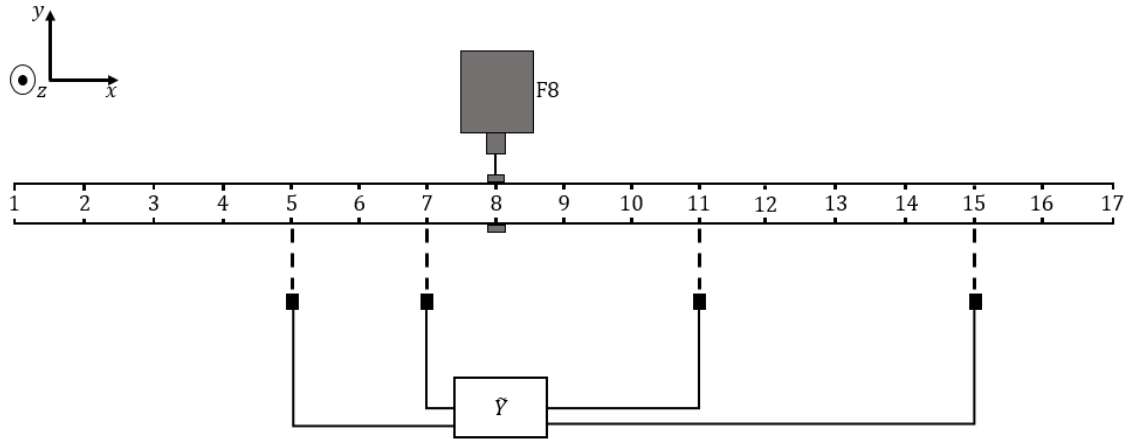


Figura 4.36 – Ilustração da viga submetida a uma excitação sinusoidal no nó 8, medindo 4 respostas dinâmicas.

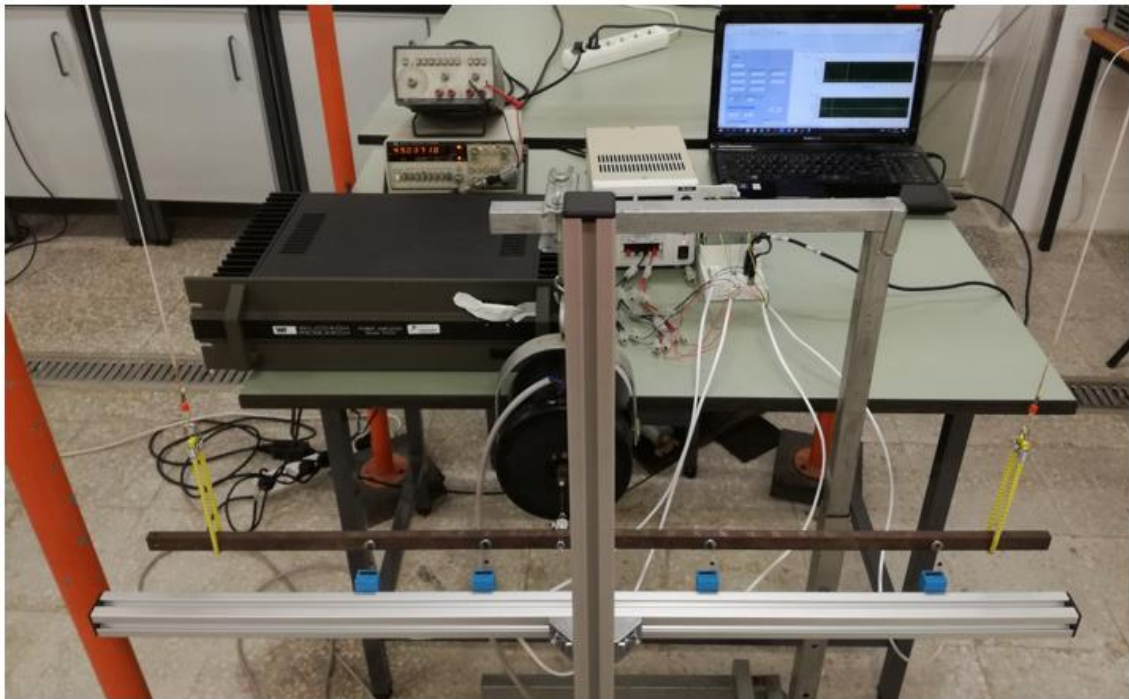


Figura 4.37 – Montagem experimental, Teste 2.

Tal como no Teste 1 – Excitação por impulso, serão considerados 2 casos de estudo, onde se utilizam:

- Caso 1. Duas respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e duas respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;
- Caso 2. Três respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e uma resposta “não conhecida” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$.

No 1.º caso, começa-se por assumir os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_7 \ Y_{15}\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_5 \ Y_{11}\}^T \quad (4.7)$$

Da Figura 4.38 à Figura 4.41, é possível observar o espectro do deslocamento adquirido.

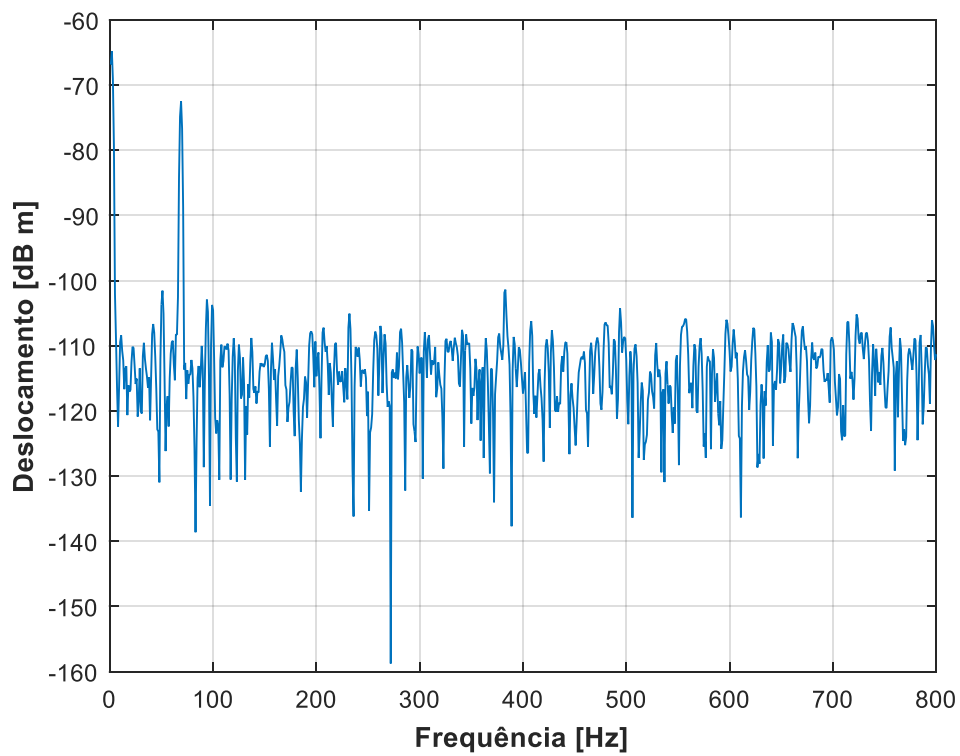


Figura 4.38 – Espectro do deslocamento no nó 5.

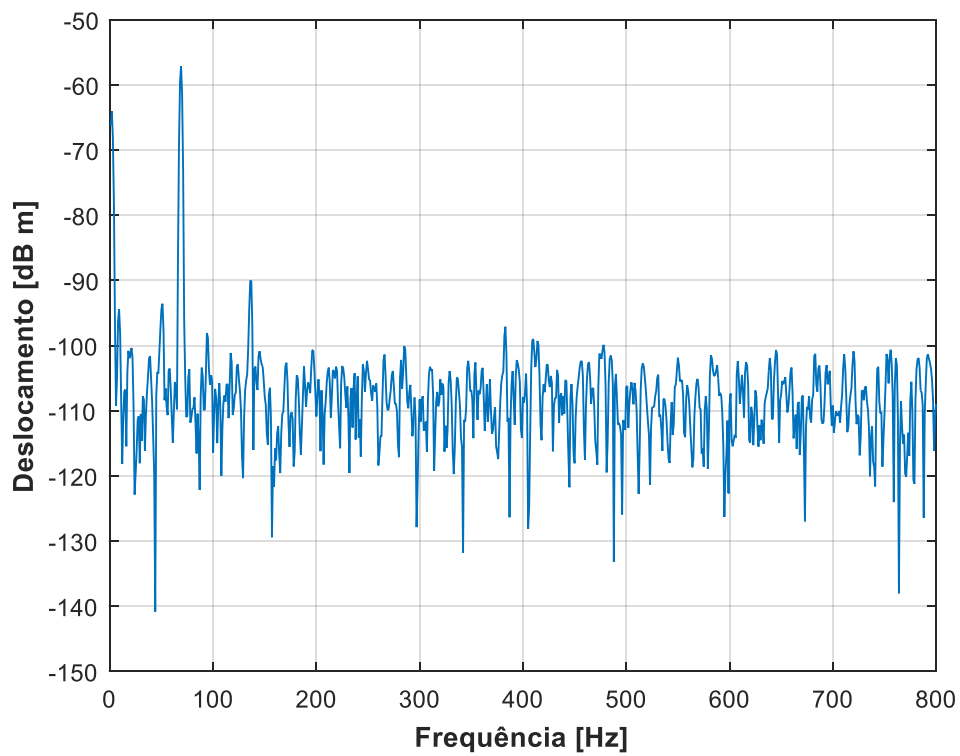


Figura 4.39 – Espectro do deslocamento no nó 7.

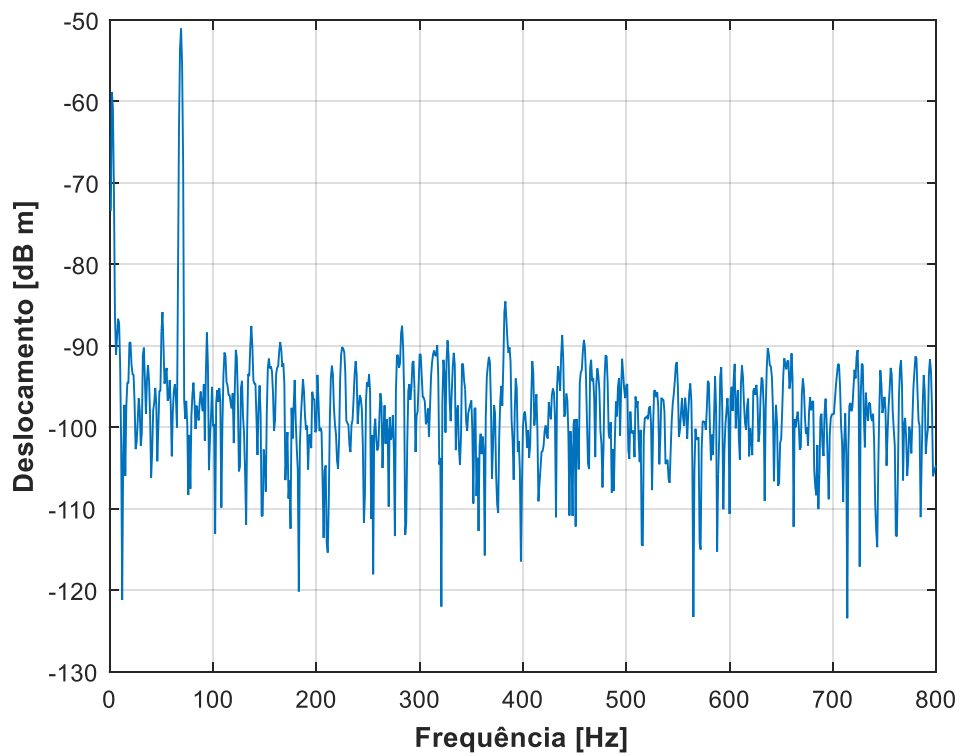


Figura 4.40 – Espectro do deslocamento no nó 11.

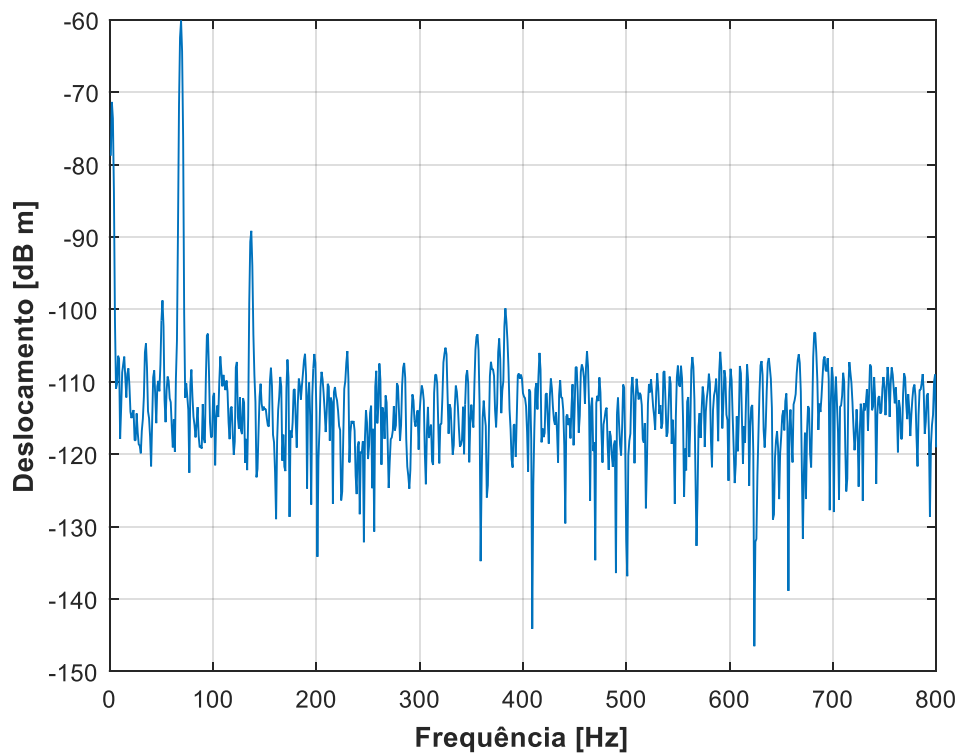


Figura 4.41 – Espectro do deslocamento no nó 15.

Observando os espectros anteriores, seria de esperar conseguir-se observar os picos correspondentes à frequência de excitação. Em todos os gráficos é possível verificar que a amplitude de maior deslocamento coincide com a frequência de excitação imposta (68 Hz). Verifica-se também a existência, em todos os gráficos, de um pico próximo da 3.ª frequência natural (392.76 Hz). No entanto, estão presentes, também, picos de ressonância que não correspondem às frequências naturais da viga. É importante constatar que, tal como na secção Teste 1 – Excitação por impulso, estes espectros do deslocamento possuem um pico aos 50 Hz proveniente da frequência da rede e também contêm ruído. Com estes resultados, é possível, mais uma vez, constatar a falta de qualidade dos sensores na obtenção de resposta em deslocamento, contrariamente ao que se pretendia. Não obstante, estas respostas são de seguida utilizadas no algoritmo projetado para a identificação de forças dinâmicas aplicadas à viga.

Considera-se a série de combinações com 1 e/ou 2 forças. Recorrendo à transmissibilidade de deslocamentos, é aplicado o método da localização e quantificação de forças, calculando o erro acumulado (Figura 4.42) entre as respostas medidas \tilde{Y}_U e as calculadas Y_U .

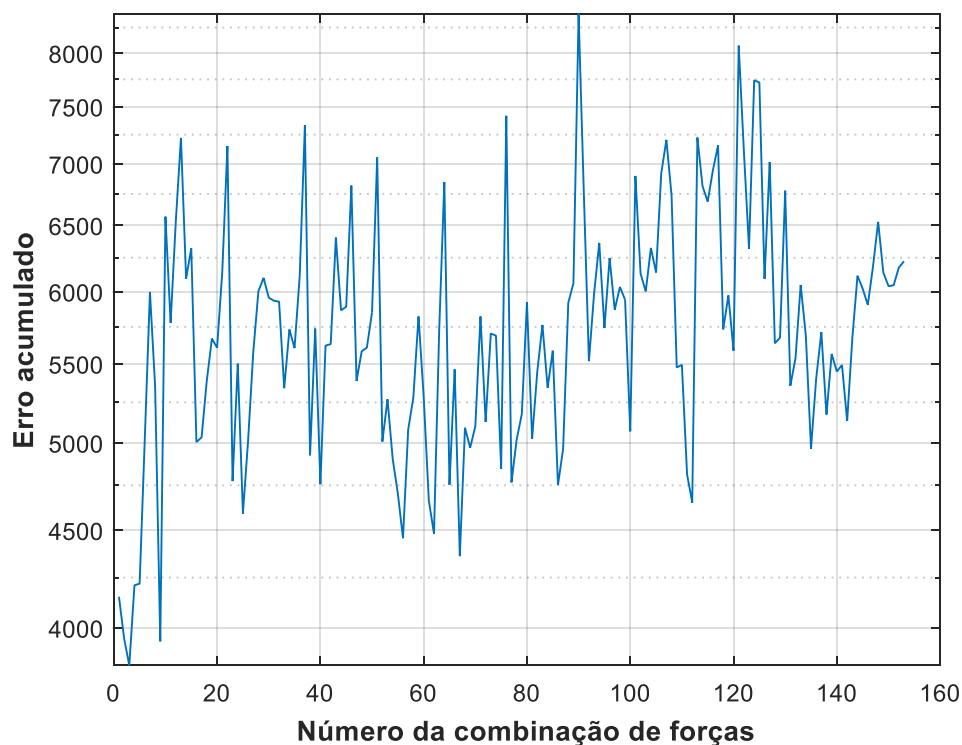


Figura 4.42 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=2 e #U=2.

Analisando a Figura 4.42, é possível observar um mínimo absoluto do erro acumulado, indicando o nó 3 (combinação 3) como a posição em que é mais provável a força estar aplicada,

o que mostra estar incorreto. Na Tabela 4.5, é possível observar as combinações que apresentam os menores erros.

Tabela 4.5 – Combinações com os menores erros, 1.º caso.

| Número da combinação | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|--------------------------------|------------------------|---------------|
| 2 | 1 | 2 | 3948.65 |
| 3 | 1 | 3 | 3823.01 |
| 9 | 1 | 9 | 3935.32 |
| 56 | 2 | 3,11 | 4456.44 |
| 67 | 2 | 4,9 | 4361.20 |

O algoritmo calculou o nó 3 como sendo a posição onde pode estar aplicada uma força. Sabendo isto, a reconstrução do vetor carregamento resulta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_y^+ \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{Bmatrix} H_{5,3} \\ H_{7,3} \\ H_{11,3} \\ H_{15,3} \end{Bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_5 \\ \tilde{Y}_7 \\ \tilde{Y}_{11} \\ \tilde{Y}_{15} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

No entanto, constatando a falta de qualidade dos deslocamentos adquiridos, e que os valores da receptância numérica a utilizar são os errados devido à má seleção do algoritmo, não se calcula a reconstrução da força, sabendo à partida que este cálculo está incorreto.

Segue-se o 2.º caso em análise, onde são consideradas conhecidas 3 respostas $\tilde{\mathbf{Y}}_K$ e 1 “não conhecida” $\tilde{\mathbf{Y}}_U$, havendo a possibilidade de estarem aplicadas à estrutura 3 forças ($\#A \leq \#K$). Assume-se os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_5 \ Y_7 \ Y_{11}\}^T \text{ e } \tilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_{15}\}^T \quad (4.9)$$

Considera-se a série de combinações com 1, 2 e/ou 3 forças. Recorrendo à transmissibilidade de deslocamentos, é aplicado o método da localização e quantificação de forças, calculando o erro acumulado (Figura 4.43) entre as respostas medidas $\tilde{\mathbf{Y}}_U$ e as calculadas \mathbf{Y}_U .

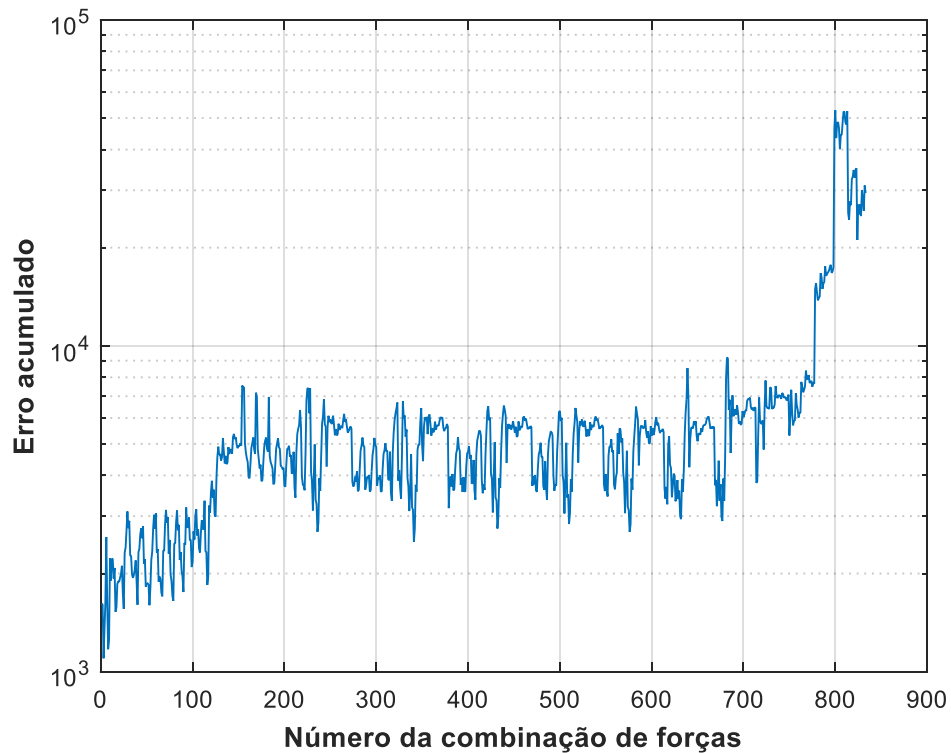


Figura 4.43 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=3$ e $\#U=1$.

É possível observar na Figura 4.43 um mínimo absoluto do erro acumulado, indicando o nó 3 (combinação 3) como a posição em que é mais provável estar uma força aplicada, o que mostra estar incorreto. É possível identificar corretamente a quantidade de forças aplicadas à viga (1 força), sendo também perceptível a diferença de patamares entre os erros acumulados para 1, 2 e 3 forças. Na Tabela 4.6, é possível observar as combinações que apresentam os menores erros.

Tabela 4.6 – Combinações com os menores erros, 2.º caso.

| Número da combinação | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|--------------------------------|------------------------|---------------|
| 3 | 1 | 3 | 1098.46 |
| 8 | 1 | 8 | 1171.20 |
| 9 | 1 | 9 | 1249.40 |

O algoritmo calculou o nó 3 como sendo a posição onde pode estar aplicada uma força. Sabendo isto, a reconstrução do vetor carregamento resulta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_y^+ \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{Bmatrix} H_{5,3} \\ H_{7,3} \\ H_{11,3} \\ H_{15,3} \end{Bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_5 \\ \tilde{Y}_7 \\ \tilde{Y}_{11} \\ \tilde{Y}_{15} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Tendo em conta a falta de qualidade dos deslocamentos adquiridos, e que os valores da receptância numérica a utilizar são os errados devido à má seleção do algoritmo, não se justifica calcular a reconstrução da força, sabendo à partida que este cálculo está errado.

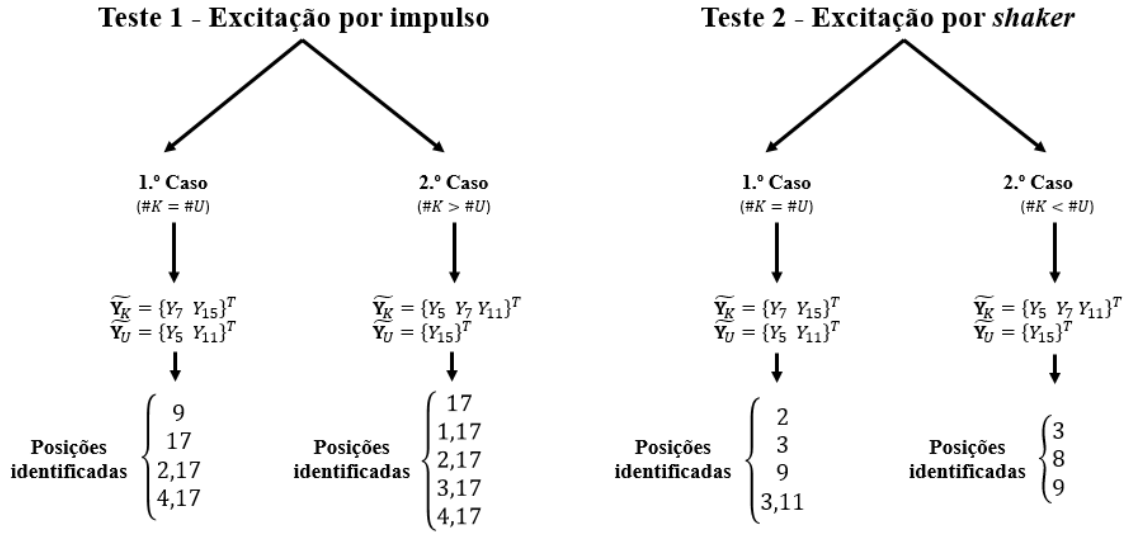


Figura 4.44 – Fluxograma de todos os casos realizados, para cada Teste.

Sintetizando, foram apresentados dois casos para cada Teste, e em cada um destes casos não foi identificada corretamente a posição da força. O 2.º caso do Teste 2 – Excitação por *shaker*, é o que apresenta melhores resultados, apresentando a posição real da força como a 2.ª melhor hipótese.

Ao contrário do Teste 1 – Excitação por impulso, no Teste 2 o algoritmo devolveu a mesma combinação (nó 3) para os dois casos, ainda que errada.

4.3 Discussão de resultados

Para todos os casos apresentados em ambos os testes, a metodologia falha na identificação de forças.

Constata-se que, tanto no Teste 1 – Excitação por impulso, como no Teste 2 – Excitação por *shaker*, é possível conferir que o número de respostas conhecidas influencia o erro acumulado calculado. Quanto mais respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ se considerar, menor é o erro calculado entre as respostas medidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e as calculadas \mathbf{Y}_U .

Relativamente ao Teste 1 – Excitação por impulso, é de referir, tanto no 1.º caso como no 2.º, a consistência do algoritmo em identificar o nó 17 como sendo uma localização possível onde uma força poderia estar aplicada.

No Teste 2 – Excitação por *shaker*, o algoritmo identifica o nó 3 como sendo o nó onde a força poderia estar aplicada, tanto no 1.º caso como no 2.º. De referir que no 2.º caso, para além de ser perceptível a diferença de patamares entre os erros acumulados para 1, 2 e 3 forças, o algoritmo identifica o nó 8 como sendo a 2.ª melhor escolha na identificação da força, sendo esta a correta. Estas verificações sugerem que a utilização dos sensores de efeito de Hall se adapta melhor se a excitação for produzida com o shaker, pois o efeito do deslocamento de corpo rígido é minimizado. Neste teste não foi feita a reconstrução do vetor de carregamento, pois o shaker não foi instrumentado. Esta decisão foi tomada por diversos motivos, os resultados dos testes apresentados e de todos os que se fizeram ao longo do projeto, foram desencorajadores e não mostraram confiança. Tendo como objetivo comprovar e deixar acessível na Faculdade a metodologia utilizada neste trabalho, decidiu-se passar logo para outra via experimental que utiliza sensores que são utilizados usualmente nesta área de Investigação.

Foram diversas as dificuldades superadas durante a criação da nova aquisição utilizando estes sensores, podendo ser esta uma das causas do insucesso da metodologia implementada. É possível, ainda, que este insucesso se deva aos sensores utilizados.

Contudo, pressupõe-se que o problema reside nos sensores de efeito de Hall. Os sensores mostram-se ser bastante capazes na aquisição de deslocamento do modo de corpo rígido, mas não são suficientemente sensíveis em detetar as pequenas amplitudes de deslocamento, presentes nos modos de corpo flexível, relativamente ao que se pretendia. Seguindo esta ideologia, seria improvável obter a resposta da viga sob a forma de deslocamento como planeado. Isto confirma-se observando a má qualidade dos espectros de deslocamento adquiridos e das forças reconstruídas.

No capítulo seguinte, será elaborado um 2.º procedimento experimental que visa confirmar a metodologia proposta, utilizando acelerómetros piezoelétricos, os quais ficam em

contacto com a estrutura. Assim, é possível comparar os 2 tipos de sensores, quando utilizados para a identificação de forças.

5. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL, ACELERÓMETROS PIEZOELÉTRICOS

Com o intuito de verificar a aplicabilidade da metodologia em estudo, este capítulo tem o objetivo de apresentar a localização, quantificação e reconstrução de forças dinâmicas aplicadas a uma viga. Apresenta-se um procedimento experimental, recorrendo a sensores acelerómetros piezoelétricos.

Com a utilização de *software* dedicado é feita uma aquisição de dados correspondentes à resposta de deslocamento de uma viga sob condições livre-livre, quando a esta é aplicada uma excitação dinâmica.

Após uma breve descrição da calibração dos acelerómetros, é exibida a montagem experimental e apresenta-se a aquisição da resposta da estrutura quando a esta é aplicada uma excitação por impulso, através de um martelo instrumentado.

Uma vez feita a aquisição das respostas dinâmicas, os dados provenientes da experiência são utilizados no algoritmo projetado com o objetivo de localizar, quantificar e reconstruir a excitação dinâmica aplicada à estrutura.

5.1 Equipamento e procedimento experimental

Nesta secção, pretende-se apresentar o equipamento e material utilizados nesta componente experimental adicional, bem como o procedimento necessário à sua realização, onde se focam os novos materiais a utilizar, o processo de calibração dos acelerómetros e a componente de aquisição e tratamento de dados envolvente. Alguns materiais utilizados já foram introduzidos no capítulo PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL, SENSORES DE EFEITO DE HALL, são eles a viga e a estrutura que a suporta (Figura 4.3).

5.1.1 Acelerómetros Piezoelétricos

Como introduzido na secção Sensores Piezoelétricos, os acelerómetros piezoelétricos combinam o uso da segunda lei de Newton e do efeito piezoelétrico para medir aceleração. Estes são compostos por uma massa sísmica que, estando sujeita a uma força por ação da aceleração da sua base de suporte, cria uma deformação num cristal de quartzo que é convertida num sinal elétrico a ser tratado e analisado.

Foram utilizados 3 acelerómetros uniaxiais, provenientes do laboratório de Mecânica Estrutural. Estes acelerómetros são da marca Brüel & Kjær e o seu modelo é o ThetaShear® Type 4507. Na Figura 5.1, é possível observar o acelerómetro em questão, bem como algumas das suas propriedades gerais [31].



| | |
|---|-------------------------|
| Dimensões [mm] | 10×10×10 |
| Gama de frequências (aquisição) [Hz] | 1 – 6000 ($\pm 10\%$) |
| Massa [grama] | 4,8 |

Figura 5.1 – Acelerómetro piezoelétrico, características gerais.

O acoplamento de acelerómetros à viga é feito utilizando cera de abelha. De maneira a manter conformidade com a secção Teste 1 – Excitação por impulso e com a secção Teste 2 – Excitação por *shaker*, foi decidido que nos testes a realizar neste capítulo, se iria adquirir 4 respostas, ou seja, seriam necessários 4 acelerómetros. Como referido anteriormente, o laboratório de Mecânica Estrutural só dispunha de 3 acelerómetros, pelo que foi necessário o acoplamento de uma massa à viga, conhecida na área como *dummy*, na posição onde faltava o 4.º acelerómetro. Este *dummy*, possui a mesma dimensão e massa que os acelerómetros.

5.1.2 Aquisição e tratamento de dados

A componente de aquisição foi feita utilizando *hardware* disponível no laboratório denominado por *Prosig P8012 – Noise & Vibration Measurement Systems* (Figura 5.2). Este sistema permite a ligação de quatro transdutores, onde foram ligados 3 acelerómetros piezoelétricos e um transdutor de força.

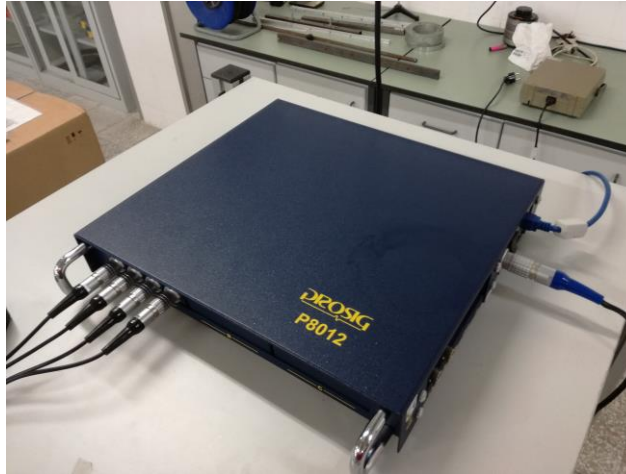


Figura 5.2 – Prosig P8012, hardware de aquisição.

Para o tratamento de dados, foi utilizado o *DATS Software - Noise & Vibration Analysis*, usado, principalmente, para a análise de vibrações e de ruído, tendo diversas aplicações no campo da engenharia e do processamento de sinais. O módulo utilizado do *DATS* para o tratamento de dados (*Acquisition V4 - Hammer Impact*) permite a visualização dos sinais em função do tempo, sendo também possível controlar alguns parâmetros de aquisição, tais como: o intervalo de frequências e o número de pontos a adquirir, o tipo de janelas a aplicar na visualização dos resultados, entre outros.

Neste procedimento, é importante obter as receptâncias nos 4 pontos da estrutura, só assim é possível comparar as receptâncias do modelo numérico com as obtidas experimentalmente. Também é importante obter o vetor força proveniente da excitação dinâmica de maneira a compará-lo com o reconstruído numericamente. Este *software* apresenta e guarda o vetor força, mas este é armazenado de uma forma que se mostra inutilizável para o que se pretende, pelo que será necessário utilizar os espectros de receptância e de deslocamento, para calcular o espectro da força aplicada. Para isso, o *software* calcula e guarda os espectros de aceleração e acelerância nos pontos de medição, a partir da qual é possível obter receptância e deslocamento.

Inicialmente, são obtidas as magnitudes e fases das acelerâncias. Utilizando o *DATS*, a acelerância é convertida para um número complexo, contendo uma parte real e imaginária, sendo estes os dados exportados para um ficheiro Excel. A acelerância pode ser representada como

$$\alpha(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) \quad (5.1)$$

onde R representa a parte real da acelerância, I a parte imaginária e i a unidade imaginária. A receptância obtém-se a partir do seguinte cálculo

$$H(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{(-\omega^2)} \quad (5.2)$$

Simultaneamente, são obtidas as magnitudes do espectro da aceleração, exportando-as para um ficheiro Excel. Assim, o espectro de deslocamento é obtido a partir do cálculo

$$Y(\omega) = \frac{\ddot{y}}{(-\omega^2)} \quad (5.3)$$

Posteriormente, calcula-se o vetor carregamento aplicado à viga, resolvendo um problema inverso, para que mais tarde seja comparado com o vetor reconstruído proveniente do modelo numérico:

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{H}}_y^+ \tilde{\mathbf{Y}} \quad (5.4)$$

Por forma a comparar o carregamento numericamente reconstruído, com o real aplicado à viga, este último é apresentado na Figura 5.3, aplicando a equação (5.4).

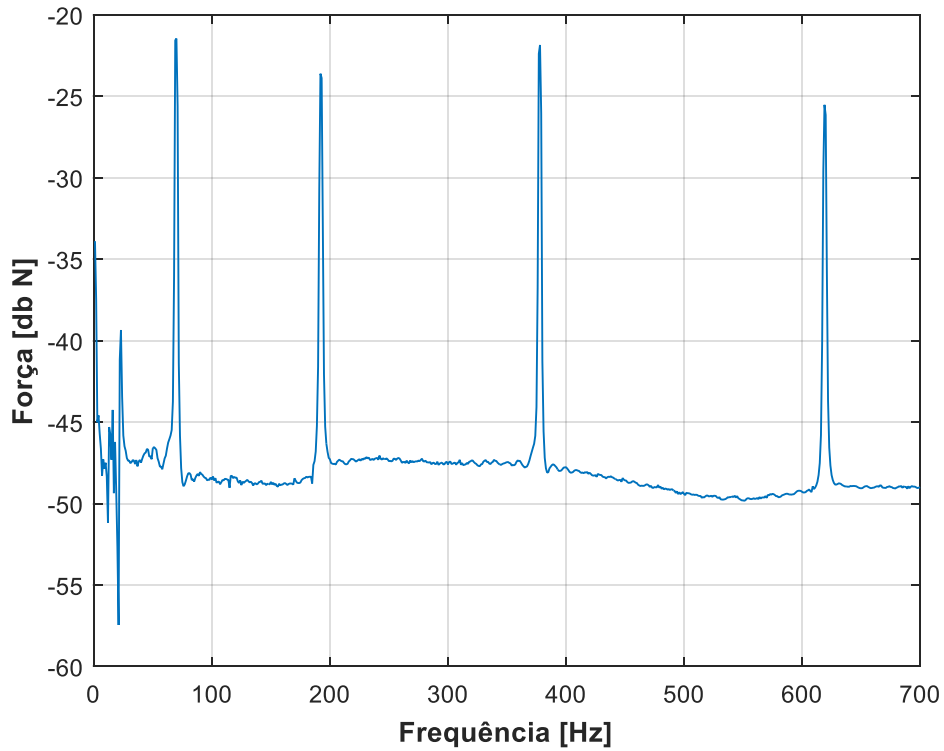


Figura 5.3 – Espectro da força real aplicada no nó 10.

5.1.3 Calibração do equipamento

Neste procedimento é necessária uma calibração para o conjunto dos acelerómetros e o martelo. Esta calibração é necessária, pois a sensibilidade destes transdutores pode variar com o tempo e já não ser coerente com a especificada pelos fabricantes. A calibração referida

anteriormente foi efetuada com base no procedimento experimental descrito em detalhe na Dissertação de Mestrado [32].

A calibração requer uma estrutura rígida, neste caso um bloco de aço com massa conhecida, e o equipamento utilizado para o Teste: acelerómetros e martelo. É feita uma calibração para cada acelerómetro. Na Figura 5.4, é possível observar um esquema do *setup* experimental para este procedimento.

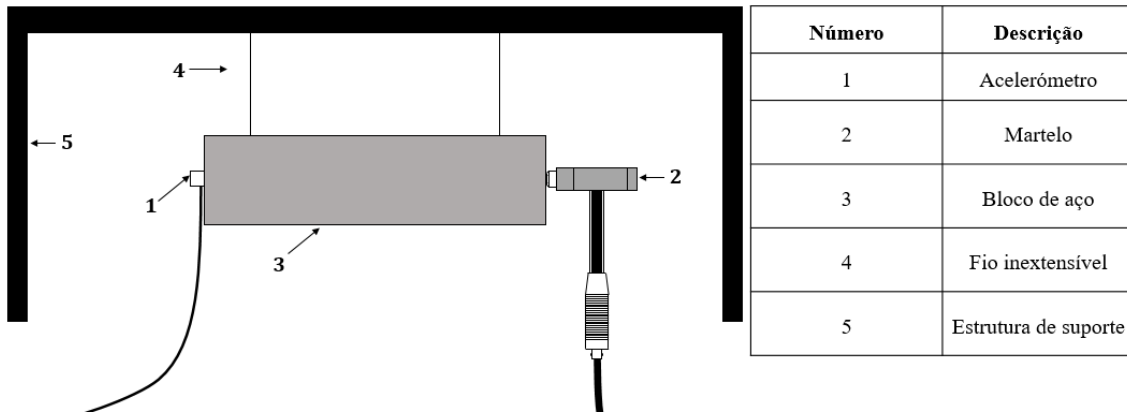


Figura 5.4 – Esquema do *setup* experimental relativo à calibração.

Neste procedimento, o bloco de massa conhecida (2,014 kg) é suspenso por dois fios inextensíveis, resultando no movimento de translação da massa num único eixo. É então aplicada uma força através do martelo de impacto, segundo o eixo de medição do acelerómetro. Posteriormente, é calculada a linha mássica que, teoricamente, representa o valor da aceleração a 0 Hz, estando esta propriedade associada aos modos de corpo rígido. No entanto, os acelerómetros piezoelétricos apresentam baixa resolução em frequências muito baixas, apresentando uma aquisição de valores irregulares. Assim, é feita uma interpolação do valor médio da aceleração, na gama de frequências utilizada nos testes experimentais. É então aplicada a seguinte formulação

$$\overline{\alpha}_{ij}(\omega) = \frac{1}{m_{bloco}} \quad (5.5)$$

A razão entre o inverso da massa do bloco e o valor médio de aceleração representa um ganho. Se o acelerómetro não estiver calibrado, o valor da aceleração difere do inverso da massa do bloco, sendo assim necessário alterar a sensibilidade do acelerómetro, multiplicando-a pelo ganho calculado. Posteriormente, este valor de sensibilidade é incorporado no *software* de aquisição.

5.2 Testes de aquisição

Pretende-se agora testar a aquisição da resposta da estrutura quando a esta é aplicada uma excitação por impulso, através de um martelo instrumentado.

Uma vez feita a aquisição das respostas dinâmicas, os dados provenientes da experiência são utilizados no algoritmo projetado com o objetivo de localizar, quantificar e reconstruir as excitações dinâmicas aplicadas à estrutura.

5.2.1 Teste 1

Esta secção estuda a resposta em translação de uma viga suspensa por dois cabos, quando a esta é aplicada uma excitação por impulso, utilizando um martelo instrumentado. Com a aquisição da resposta em deslocamento da viga, pretende-se, numa 1.^a fase, localizar e quantificar as forças nela aplicadas. Completando a 1.^a etapa com sucesso, proceder-se-á à reconstrução do vetor carregamento. Na Figura 5.5, é possível observar a sequência de operações desenhada para este ensaio.



Figura 5.5 – Sequência de operações, Teste 1.

Como referido em Modelo de Elementos Finitos, uma das condições mais importantes neste método de identificação de forças reside na precisão do modelo numérico face ao modelo experimental, visto que a localização, quantificação e reconstrução das forças de excitação é um processo híbrido que envolve respostas medidas experimentalmente e o modelo de resposta computacional. No capítulo PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL, SENSORES DE EFEITO DE HALL, não foi possível realizar esta comparação devido à falta de sensibilidade dos sensores de efeito de Hall em detetar deslocamentos de corpo flexível. No entanto, com os acelerómetros

piezoelétricos, é possível agora comparar as duas. O acoplamento dos acelerómetros à viga, causa uma alteração no modelo de resposta experimental, em relação ao modelo teórico. Assim sendo, é necessário compensar a inércia dos acelerómetros no modelo teórico.

Quando se compara duas funções de resposta em frequência, é importante existir um critério de correlação, de modo a quantificar a diferença de ambas. O critério de correlação escolhido foi o *Cross Signature Correlation* (CSC), apresentado e discutido em [33]. O CSC é dividido em dois critérios: o *Cross Signature Assurance Criterion* (CSAC), que compara as diferenças nas frequências e nos modos de vibração, e o *Cross Signature Scale Factor* (CSF), que compara as diferenças nas amplitudes de cada FRF. Comparando a FRF $H_{5,10}$ experimental com a respetiva FRF numérica, para cada um dos critérios, obtiveram-se os valores ilustrados na Figura 5.6. Na Figura 5.7, comparam-se novamente as duas FRFs, agora com o modelo numérico mais próximo do modelo real, devido à inclusão da inércia dos acelerómetros. No Apêndice VII, estão presentes as outras comparações entre FRFs, antes e após serem atualizadas $H_{7,10}$, $H_{11,10}$ e $H_{15,10}$.

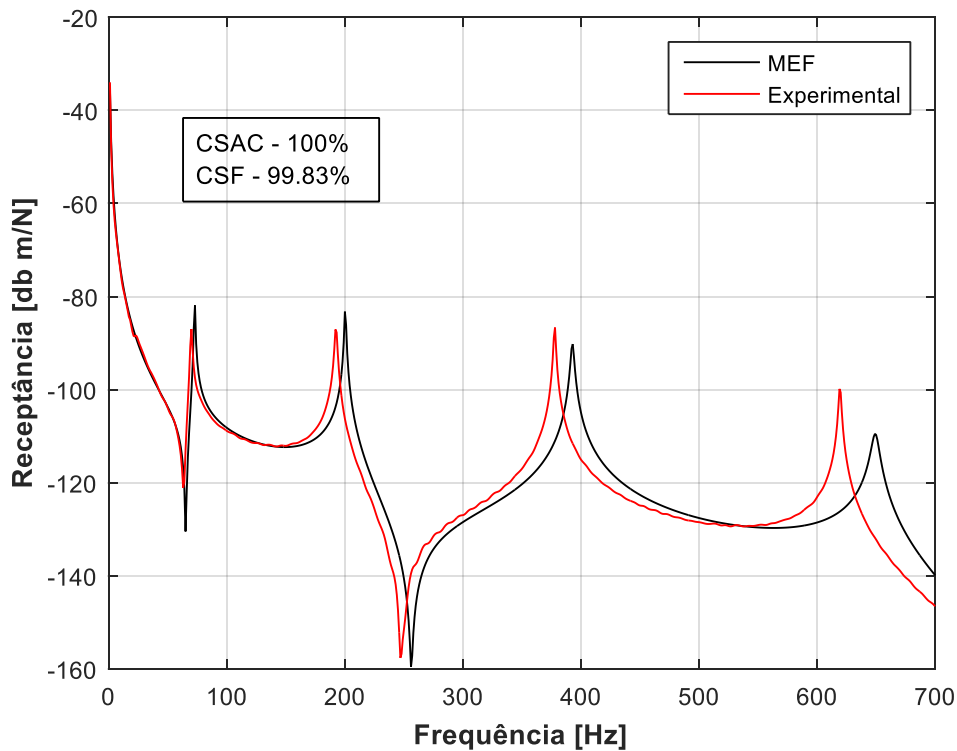


Figura 5.6 – Funções de resposta em frequência $H_{5,10}$, experimental e numérica antes da atualização.

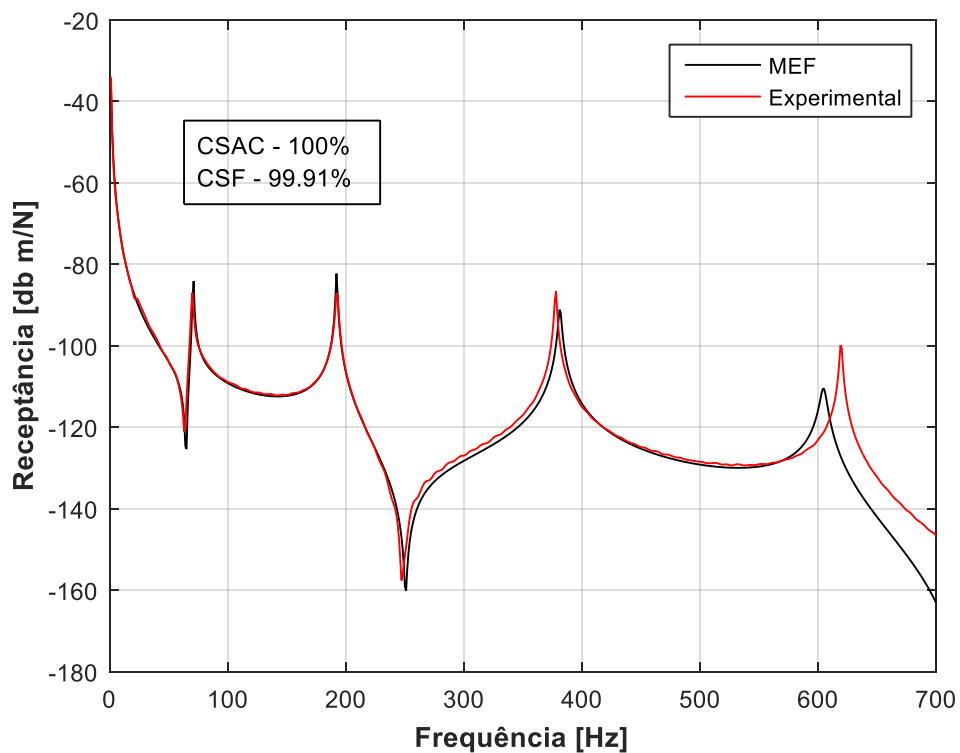


Figura 5.7 – Funções de resposta em frequência $H_{5,10}$, experimental e numérica atualizada.

Neste teste, a força será aplicada no nó 10 e serão medidas 4 respostas dinâmicas nos nós 5, 7, 11 e 15, como ilustrado na Figura 5.8. Na Figura 5.9, é possível observar a montagem experimental deste teste.

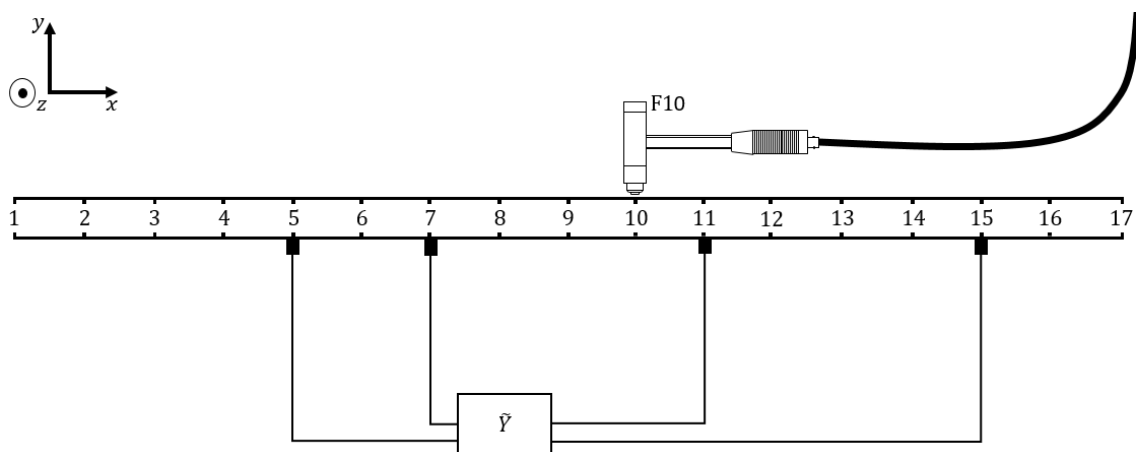


Figura 5.8 – Ilustração da viga submetida a uma excitação por impacto no nó 10, medindo 4 respostas dinâmicas.



Figura 5.9 – Montagem experimental, Teste 1.

Serão considerados 3 casos de estudo, onde se utilizam:

- Caso 1. Uma resposta conhecida $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e três respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;
- Caso 2. Duas respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e duas respostas “não conhecidas” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$;
- Caso 3. Três respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e uma resposta “não conhecida” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$.

No 1.º caso, começa-se por assumir os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_5\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_7 \ Y_{11} \ Y_{15}\}^T \quad (5.6)$$

Tal como no capítulo PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL, SENSORES DE EFEITO DE HALL, começa-se por apresentar o espectro do deslocamento ($\widetilde{\mathbf{Y}}_5$) adquirido (Figura 5.10).

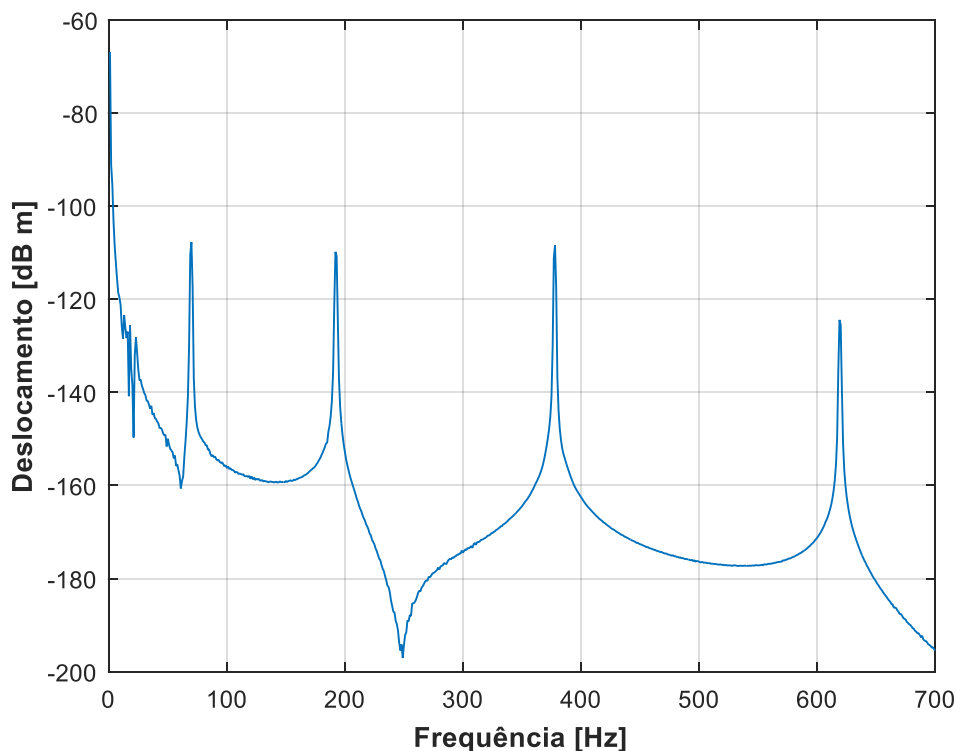


Figura 5.10 – Espectro do deslocamento no nó 5.

O espectro apresentado na Figura 5.10 contrasta com o apresentado na Figura 4.38, na medida em que é possível identificar corretamente as primeiras frequências naturais da viga: a 1.^a a 72.68 Hz, a 2.^a a 200.32 Hz, a 3.^a a 392.75 Hz e a 4.^a a 649.39 Hz. Observando os outros 3 espectros em estudo, apresentados no Apêndice VIII, constata-se a existência de picos de frequência, também coincidentes com as primeiras frequências naturais da viga. Estas respostas de deslocamento são de seguida utilizadas no algoritmo desenvolvido para a identificação de forças aplicadas à viga.

O número de posições possíveis das forças não pode ser superior a 1, pois considera-se que conhecemos uma resposta $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$, e assim $\#A \leq \#K$. Neste seguimento, considera-se a série de combinações com 1 força. Recorrendo à transmissibilidade de deslocamentos, é aplicado o método da localização e quantificação de forças, calculando o erro acumulado (Figura 5.11) entre as respostas medidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e as calculadas \mathbf{Y}_U .

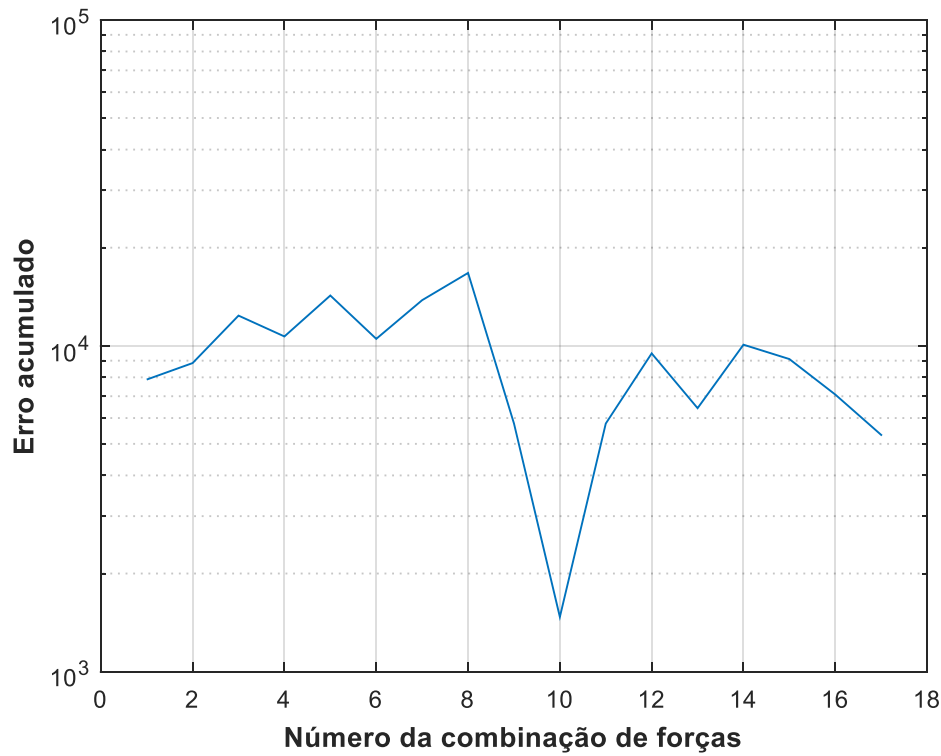


Figura 5.11 – Erro acumulado para cada combinação, com #K=1 e #U=3.

Analisando a Figura 5.11, é possível observar um mínimo absoluto do erro acumulado, indicando o nó 10 (combinação 10) como a posição onde a força pode estar a ser aplicada, o que mostra estar correto. O algoritmo calcula corretamente tanto o número de forças, como a posição onde esta está aplicada.

No 2.º caso, começa-se por assumir os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_K = \{Y_5 \ Y_{15}\}^T \text{ e } \widetilde{\mathbf{Y}}_U = \{Y_7 \ Y_{11}\}^T \quad (5.7)$$

O número de posições possíveis das forças não pode ser superior a 2 forças, pois considera-se que conhecemos 2 respostas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$, e assim $\#A \leq \#K$. Neste seguimento, considera-se a série de combinações com 1 e/ou 2 forças. O método da localização e quantificação de forças é novamente aplicado, calculando o erro acumulado (Figura 5.12) entre as respostas medidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e as calculadas \mathbf{Y}_U .

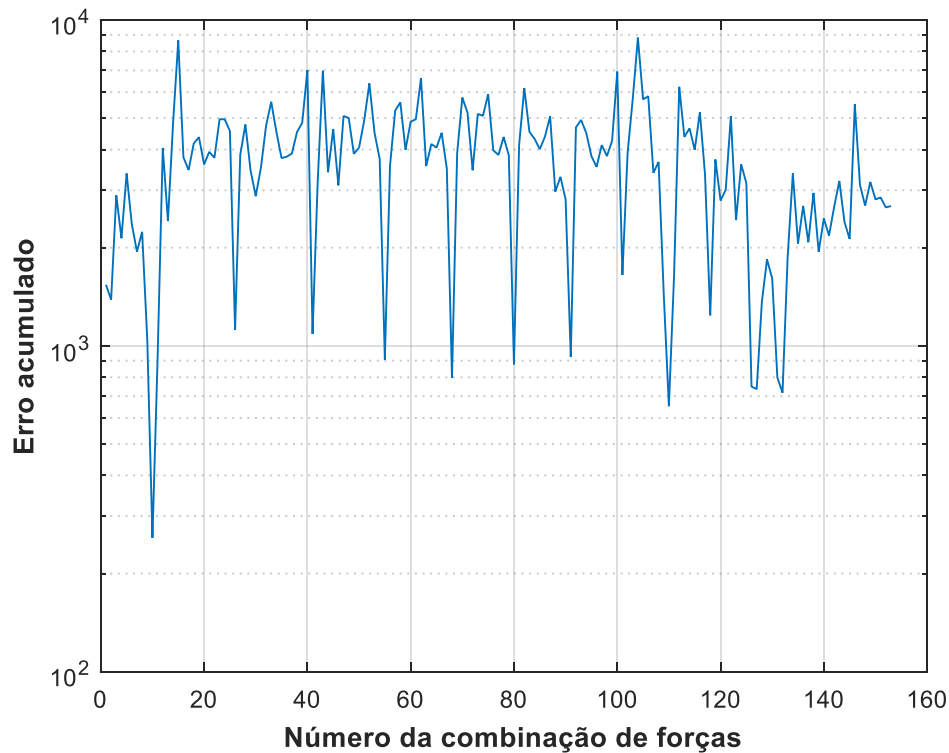


Figura 5.12 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=2$ e $\#U=2$.

Analisando o gráfico da Figura 5.12, é possível observar um mínimo absoluto do erro acumulado, indicando a combinação número 10 (nó 10) como a posição onde a força pode estar a ser aplicada, o que mostra estar correto. O algoritmo calcula corretamente tanto o número de forças, como a posição onde esta está aplicada. Para além do mínimo absoluto, observa-se outros mínimos relativos correspondentes a outras combinações de forças que incluem o nó 10. Na Tabela 5.1, é possível observar as combinações que apresentam os menores erros.

Tabela 5.1 – Combinações com os menores erros, 2.º caso.

| Número da combinação | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|--------------------------------|------------------------|---------------|
| 10 | 1 | 10 | 257.25 |
| 41 | 2 | 2,10 | 1087.59 |
| 68 | 2 | 4,10 | 798.64 |
| 110 | 2 | 8,10 | 652.44 |

Concluindo com o 3.º caso em análise, são consideradas conhecidas 3 respostas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ e 1 “não conhecida” $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$, havendo a possibilidade de estarem aplicadas à estrutura 3 forças. Assume-se os seguintes vetores de respostas dinâmicas medidos:

$$\widehat{\mathbf{Y}}_K = \{Y_5 \ Y_{11} \ Y_{15}\}^T \text{ e } \widehat{\mathbf{Y}}_U = \{Y_7\}^T \quad (5.8)$$

O número de posições possíveis das forças não pode ser superior a 3 forças, pois considera-se que conhecemos 3 respostas $\widehat{\mathbf{Y}}_K$, e assim $\#A \leq \#K$. Neste seguimento, considera-se a série de combinações com 1, 2 e/ou 3 forças. Calcula-se o erro acumulado entre as respostas medidas $\widehat{\mathbf{Y}}_U$ e as calculadas \mathbf{Y}_U , apresentado na Figura 5.13.

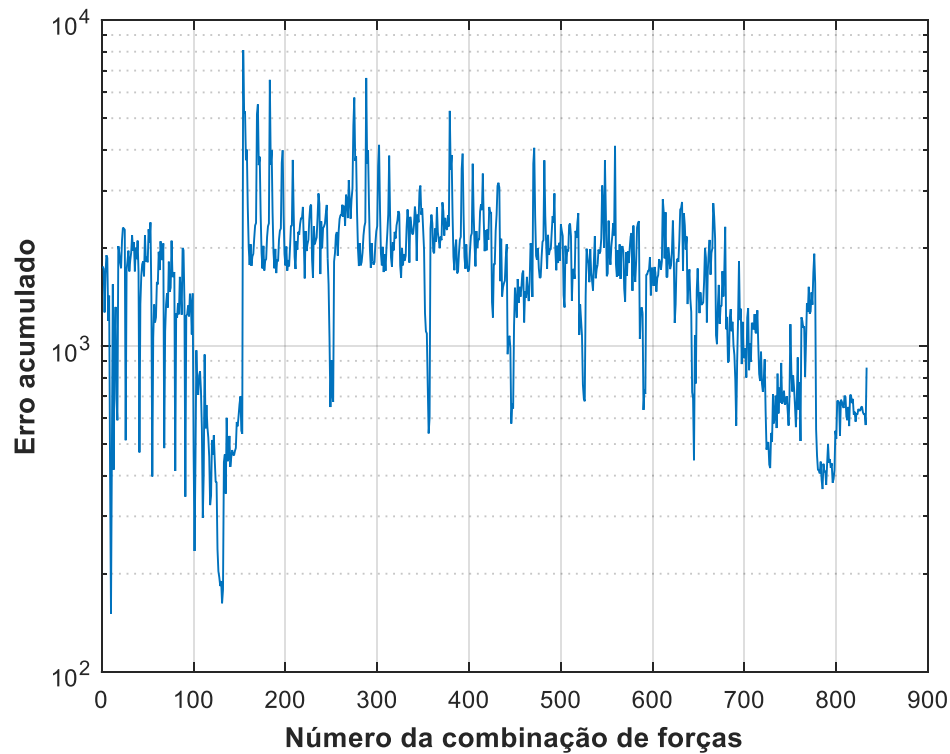


Figura 5.13 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=3$ e $\#U=1$.

Analisando a Figura 5.13, é possível observar um mínimo absoluto do erro acumulado, indicando o nó 10 (combinação 10) como a posição onde possa existir 1 força aplicada, o que mostra estar correto. Observa-se outros mínimos relativos correspondentes a outras combinações de forças que incluem o nó 10. Na Tabela 5.2, é possível observar as combinações que apresentam os menores erros.

Tabela 5.2 – Combinações com os menores erros, 3.º caso.

| Número da combinação | Número de forças identificadas | Posições identificadas | Erro Absoluto |
|----------------------|--------------------------------|------------------------|---------------|
| 10 | 1 | 10 | 150.98 |
| 101 | 2 | 7,10 | 234.90 |
| 110 | 2 | 8,10 | 296.57 |
| 131 | 2 | 10,16 | 162.30 |

No 1.º, 2.º e 3.º casos, o algoritmo calculou corretamente o nó 10 como sendo a posição onde a força estaria aplicada. A reconstrução do vetor carregamento resulta da multiplicação da matriz pseudo-inversa de receptância, pelo vetor de respostas dinâmicas medido. Observando a Figura 5.14 e Figura 5.15, é possível comparar a força real com a força reconstruída, antes e após a atualização do modelo numérico, respetivamente.

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_y^+ \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{Bmatrix} H_{5,10} \\ H_{7,10} \\ H_{11,10} \\ H_{15,10} \end{Bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_5 \\ \tilde{Y}_7 \\ \tilde{Y}_{11} \\ \tilde{Y}_{15} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

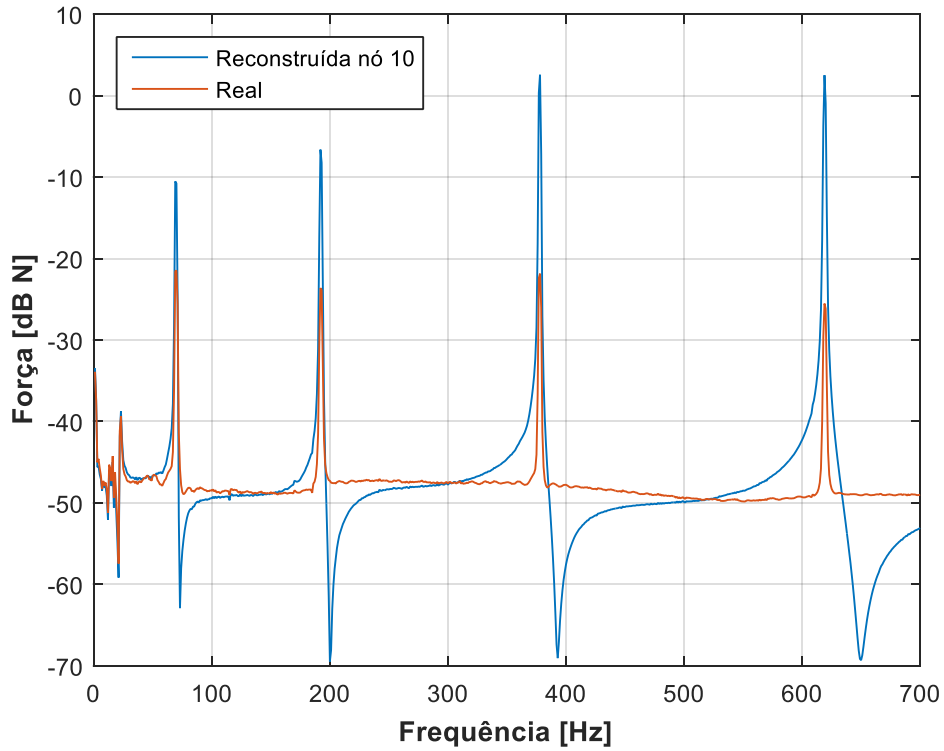


Figura 5.14 – Comparação entre a força real e reconstruída no nó 10, antes da atualização do modelo numérico.

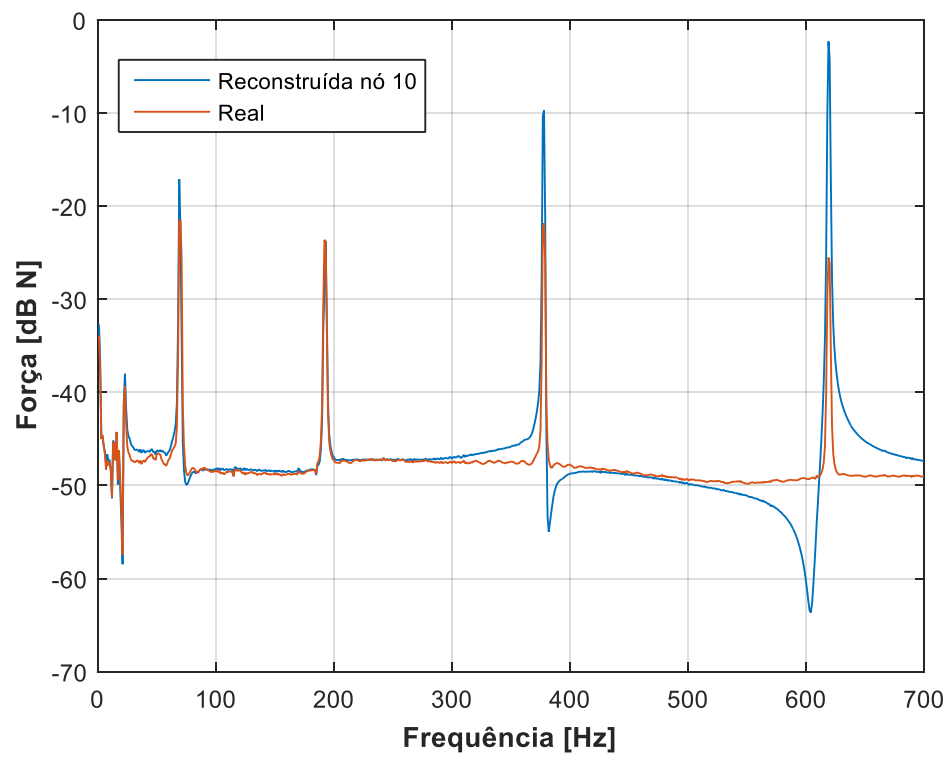


Figura 5.15 – Comparação entre a força real e reconstruída no nó 10, após a atualização do modelo numérico.

5.3 Discussão de resultados

Ao contrário do capítulo anterior, os resultados obtidos nestes últimos ensaios, utilizando acelerómetros piezoelétricos, são bastante satisfatórios. Nos 1.º, 2.º e 3.º casos, comprova-se a aplicabilidade da metodologia em estudo, na medida em que é possível localizar e quantificar forças de excitação dinâmica, quando a força aplicada é uma excitação por impulso.

Observando a Figura 5.6, é possível constatar a proximidade do modelo de resposta entre o MEF e o real. Estima-se que a diferença entre as duas se deve ao facto dos acelerómetros estarem acoplados à viga, o que causa alteração no seu modelo de resposta real, considerando que esta reside em condições livre-livre. Ainda assim, foi feita uma atualização do modelo teórico, aproximando-o do modelo real, que resultou numa aproximação considerável entre os dois.

Aparentemente, a existência de um furo no nó 8 da viga, adulterava a receptância nos nós à esquerda (5 e 7) em que se estava a medir com os acelerómetros. Assim sendo, o furo também pode ter contribuído para o desvio entre o modelo de resposta real e do MEF.

Constata-se novamente, que o número de respostas conhecidas influencia o erro acumulado calculado. Quanto mais respostas conhecidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$ se considerar, menor é o erro calculado entre as respostas medidas $\widetilde{\mathbf{Y}}_U$ e as calculadas \mathbf{Y}_U . No entanto, ao aumentar o número de $\widetilde{\mathbf{Y}}_K$, existem mais combinações com um erro acumulado próximo da combinação da combinação correta, o que faz sentido.

Não sendo possível medir o carregamento real aplicado à viga, este foi obtido recorrendo à receptância e deslocamento medidos. As 4 respostas dos nós 5, 7, 11 e 15 não foram medidas todas no mesmo teste devido à falta de um acelerómetro, pois o laboratório só possui 3.

Em todos os casos, o algoritmo calcula tanto a localização, como a quantidade correta de forças aplicadas à viga. Nos 2.º e 3.º casos, verifica-se novamente uma diferença de patamares entre os erros acumulados para 1, 2 e 3 forças, destacando-se a presença de combinações com mínimos relativos que contêm o nó 10.

A reconstrução do carregamento é coerente com o real, na medida em que apresentam uma forma similar, e os seus espectros coincidem nos picos de frequência natural. A divergência entre os dois ocorre na gama de frequências dos 400 – 700 Hz. Esta diferença é suportada, comparando as duas FRFs, real e teórica, $H_{5,10}$. Observando a Figura 5.7, verifica-se um afastamento entre elas, na gama de frequências referida anteriormente. A reconstrução do vetor carregamento resulta de um processo híbrido em que junta as respostas medidas, com o modelo de resposta numérico. Basta existir uma pequena diferença entre o modelo teórico e o real para que, o cálculo da matriz pseudo-inversa na equação (5.9), resulte numa má reconstrução do

carregamento. É possível verificar o que acima foi enunciado, comparando as Figura 5.14 e Figura 5.15. Após a atualização do modelo numérico, a reconstrução da força no nó 10 aproximou-se consideravelmente da força real.

De referir ainda que, antes da atualização, a utilização do algoritmo na identificação de forças para o 3.º caso não identificou a combinação n.º 10 como mínimo absoluto, mas sim um mínimo relativo próximo do absoluto. Este último identificou os nós 7 e 10 (combinação 101) como as posições onde fosse mais provável estarem aplicadas forças. Este resultado é espektável na medida em que se juntam dois obstáculos: a diferença entre os dois modelos de resposta, real e teórico; o aumento do número de respostas conhecidas \widetilde{Y}_K , provocando a origem de combinações com um erro acumulado próximo da combinação correta.

6. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

6.1 Conclusão

O objetivo proposto para presente dissertação fixou-se no processo de identificação de forças com base no conceito de transmissibilidade, tanto numa vertente teórica, como experimental. No que diz respeito à implementação dos conceitos teóricos da transmissibilidade, estes foram verificados recorrendo a simulações numéricas. A componente experimental tentou verificar a metodologia utilizada teoricamente, dividindo-se em duas partes: primeiro, utilizando sensores de efeito de Hall; depois, utilizando sensores acelerómetros piezoelétricos.

No capítulo 3, foi apresentada a metodologia de identificação de forças utilizada. Posteriormente, foi desenvolvido um algoritmo que, numa 1.^a fase, constrói um modelo numérico reduzido da viga. De seguida, são apresentadas várias simulações numéricas por forma a testar a metodologia em estudo. A partir dos resultados obtidos das simulações numéricas, é possível determinar o número e posições das forças aplicadas à viga, com base no conceito de transmissibilidade de deslocamentos, tanto para forças constantes no domínio da frequência, como para forças harmónicas. Na secção 3.4.1, a simulação realizada teve como objetivo comparar os resultados aí obtidos, com os da 1.^a simulação numérica apresentada no trabalho publicado por *Lage et al.* [10]. No Anexo I, é possível observar os resultados obtidos em [10], dando especial à Figura Anexo.2 que apresenta o cálculo do erro acumulado quando $\#K = 3$ e $\#U = 2$. Uma vez aplicado o algoritmo, o caso mais interessante de se estudar é quando $\#A \leq \#K$, pois possibilita a existência de mínimos relativos próximos do mínimo absoluto. Observando a Figura 3.10, entre o mínimo absoluto e o menor mínimo relativo existe uma diferença com uma ordem de grandeza de 10^8 . Este resultado contrasta com o resultado obtido em [10], uma vez que, neste último, a diferença entre o mínimo absoluto e o menor mínimo relativo tem uma ordem de grandeza de 10^1 . Esta comparação de resultados sugere que os algoritmos desenvolvidos nesta dissertação possam ser mais apropriados no processo de identificação de forças com base no

conceito de transmissibilidade, pois apresentam melhores resultados. Desta forma, foi alcançado com sucesso a contextualização e construção de um modelo numérico reduzido do sistema dinâmico da viga em estudo, bem como a criação de algoritmos que permitissem a localização e quantificação de forças.

No capítulo 4, apresentou-se um procedimento experimental, com o objetivo de verificar a metodologia referente à identificação de forças dinâmicas, utilizando sensores de efeito de Hall como meio de adquirir respostas de deslocamento da viga. Numa primeira fase, foi construído o modelo experimental necessário à realização dos testes de aquisição. Seguidamente, foi desenvolvido um programa que permitisse a aquisição e tratamento de dados. Posteriormente, foram realizadas várias calibrações dos sensores de efeito de Hall, com o intuito de obter as curvas de calibração a utilizar no programa desenhado para adquirir as respostas de deslocamento da viga. Foram conduzidos 2 testes, que se diferenciaram no tipo de excitação dinâmica aplicada à viga. Concluiu-se que, para todos os casos apresentados em ambos os testes, a metodologia falha na identificação de forças. Pressupõe-se que este resultado deriva da falta de sensibilidade dos sensores de efeito de Hall em adquirir deslocamentos em modo de corpo flexível. Em ambos os testes, os espectros adquiridos de deslocamento não correspondem ao pretendido, devido ao facto de conterem bastante ruído, não ser possível identificar todas as frequências naturais da viga e existirem picos de ressonância que não correspondem às frequências naturais da viga. Contudo, os resultados obtidos sugerem que os sensores de efeito de Hall se adaptam melhor na verificação da metodologia em estudo, se a excitação for produzida com o agitador eletromecânico, pois o efeito do deslocamento de corpo rígido é minimizado.

No capítulo 5, apresentou-se outro procedimento experimental, com o objetivo de verificar a metodologia referente à identificação de forças dinâmicas, desta vez utilizando sensores acelerómetros piezoelétricos. Comprova-se a aplicabilidade da metodologia enunciada, na medida em que é possível localizar e quantificar forças de excitação por impulso. Considerando a força real como o produto do inverso das receptâncias pelos deslocamentos, ambos adquiridos experimentalmente, é possível constatar uma boa reconstrução do vetor carregamento aplicado recorrendo ao modelo numérico. No teste realizado, verifica-se o impacto da atualização do modelo numérico do sistema dinâmico da viga, concretamente na localização e quantificação de forças no 3.º caso, assim como também na reconstrução do carregamento aplicado. A atualização do modelo numérico resumiu-se no acréscimo das componentes de inércia dos acelerómetros à matriz de massa do modelo. Realizada esta atualização, verificou-se a correta localização e quantificação de forças para o 3.º caso, pelo que se conclui que, tanto para a localização/quantificação como para a reconstrução da força, é importante aproximar o modelo teórico ao real tanto quanto possível, particularmente na capacidade do método em reconstruir o carregamento.

Tendo em conta o tema da presente dissertação, conclui-se que é possível identificar forças com base no conceito da transmissibilidade. Porém, esta identificação foi verificada numa vertente computacional, sendo verificada experimentalmente utilizando sensores convencionais, pelo que não foi possível confirmar a sua aplicabilidade utilizando sensores não-contacto.

6.2 Trabalhos futuros

O objetivo principal deste projeto centrou-se no processo de identificação de forças com base no conceito de transmissibilidade, recorrendo a sensores que não estivessem em contacto com a estrutura, contrastando assim com os sensores de contacto normalmente utilizados em trabalhos desenvolvidos nesta área.

Não tendo sido possível atingir o objetivo referido anteriormente, seria interessante dar seguimento ao trabalho aqui desenvolvido, explorando a aplicação de sensores não-contacto na medição da resposta, em deslocamento, de uma estrutura. Por um lado, seria outra forma de realizar a aquisição de deslocamentos, por outro, seria possível investigar a identificação de forças numa outra área com bastante aplicação industrial: a equilibragem dinâmica de rotores.

Face ao que foi dito anteriormente, dá-se o exemplo de um sensor de deslocamento linear capacitivo. De acordo com [34], este último é capaz de medir deslocamentos do material alvo, a uma distância que varia entre os $0.25 - 2\text{ mm}$, de qualquer material condutor, conseguindo adquirir respostas numa gama de frequências de $0 - 15\text{ kHz}$. Outros tipos de sensores interessantes de serem estudados são os sensores de deslocamento linear por correntes induzidas [35]. Este tipo de sensor é particularmente interessante, pois permite a aquisição de deslocamento com alta resolução, de qualquer elemento vibratório numa gama de frequências dos $0 - 80\text{ kHz}$. Contudo, os dois tipos de sensores referidos anteriormente necessitam de equipamento próprio para a sua aquisição, o que torna todo o conjunto bastante dispendioso.

Ainda que sejam bastante fracos em medir amplitudes de deslocamento no modo de corpo flexível, os sensores de efeito de Hall mostraram-se capazes na medição de amplitudes de deslocamento presentes no modo corpo rígido. Assim sendo, estes sensores não-contacto podem ser uma referência para trabalhos relacionados com o movimento de corpo rígido (baixa frequência), com a vantagem de não alterarem o modelo de resposta real de estruturas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Urgueira, A. P. V., 2008, “Texto de Apoio - MEEM, Equilibragem Dinâmica de Rotores Rígidos,” Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.
- [2] Lourens, E., Reynders, E., De Roeck, G., Degrande, G., and Lombaert, G., 2012, “An Augmented Kalman Filter for Force Identification in Structural Dynamics,” *Mech. Syst. Signal Process.*, **27**(1), pp. 446–460.
- [3] Matos, M. A. A. S., 2013, “Balancing and Force Identification in Rotordynamics,” Dissertação de Mestrado em Engenharia Aeroespacial, Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa.
- [4] Siemens, 2014, “Siemens SST-500 GEO Steam Turbine” [Online]. Available: <http://ieccetech.org/issue/2014-05/Full-steam-ahead>.
- [5] Martin, M. T., and Doyle, J. F., 1996, “Impact Force Identification from Wave Propagation Responses,” *Int. J. Impact Eng.*, **18**(1), pp. 65–77.
- [6] Michaels, J. E., and Pao, Y. H., 1985, “The Inverse Source Problem for an Oblique Force on an Elastic Plate,” *J. Acoust. Soc. Am.*, (6), pp. 2005–2011.
- [7] Ribeiro, A. M. R., Silva, J. M. M., and Maia, N. M. M., 2000, “On the Generalisation of the Transmissibility Concept,” *Mech. Syst. Signal Process.*, **14**, pp. 29–35.
- [8] Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., and Ribeiro, A. M. R., 2001, “The Transmissibility Concept in Multi-Degree-of-Freedom Systems,” *Mech. Syst. Signal Process.*, **15**(1), pp. 129–137.
- [9] Lage, Y. E., Neves, M. M., Maia, N. M. M., and Tcherniak, D., 2014, “Force Transmissibility versus Displacement Transmissibility,” *J. Sound Vib.*, **333**(22), pp. 5708–5722.
- [10] Lage, Y. E., Maia, N. M. M., Neves, M. M., and Ribeiro, A. M. R., 2013, “Force Identification Using the Concept of Displacement Transmissibility,” *J. Sound Vib.*, **332**(7), pp. 1674–1686.
- [11] Khoo, S. Y., Ismail, Z., Kong, K. K., Ong, Z. C., Noroozi, S., Chong, W. T., and Rahman, A. G. A., 2014, “Impact Force Identification with Pseudo-Inverse Method on a Lightweight Structure for under-Determined, Even-Determined and over-Determined Cases,” *Int. J. Impact Eng.*, **63**, pp. 52–62.
- [12] Wang, B.-T., and Chiu, C.-H., 2003, “Determination of Unknown Impact Force Acting on a Simply Supported Beam,” *J. Sound Vib.*, **17**, pp. 683–704.
- [13] Liu, Y., and Shepard, W. S., 2005, “Dynamic Force Identification Based on Enhanced

- Least Squares and Total Least-Squares Schemes in the Frequency Domain,” *J. Sound Vib.*, **282**, pp. 37–60.
- [14] Rao, S. S., 2010, *Mechanical Vibrations*, Prentice Hall.
 - [15] Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., He, J., Lieven, N. A. J., Lin, R. M., Skingle, G. W., To, W., and Urgueira, A. P. V., 1997, *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Pres Ltd.
 - [16] Maia, N. M. M., Urgueira, A. P. V., and Almeida, R. A. B., 2011, “Whys and Wherefore of Transmissibility,” *Intech*.
 - [17] Urgueira, A. P. V., Almeida, R. A. B., and Maia, N. M. M., 2011, “On the Use of the Transmissibility Concept for the Evaluation of Frequency Response Functions,” **25**, pp. 940–951.
 - [18] Amaral, C. M. R. S. P., 2017, “Localização E Quantificação de Dano Com Recurso Às FRFs,” *Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa*.
 - [19] Saldanha, F. R. Q., 2015, “MODEL UPDATING BASED ON MDOF TRANSMISSIBILITY CONCEPT,” *Dissertação de Mestrado em Engenharia Aeroespacial, Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa*.
 - [20] Jorge, S., Maia, N. M. M., Neves, M. M., and Sampaio, C., 2017, “FORCE AND DISPLACEMENT TRANSMISSIBILITY MATRICES IN ROTORDYNAMICS,” *Proceedings of the International Conference on Structural Engineering Dynamics*.
 - [21] Copeland, B. J., and Proudfoot, D., “Alan Turing, Father of the Modern Computer,” *Rutherford J.*, **4**.
 - [22] The Shanghai Tower Construction & Development Company, 2015, “Shanghai Tower” [Online]. Available: http://www.thorntontomasetti.com/projects/shanghai_tower/. [Accessed: 24-Apr-2017].
 - [23] Zhao, X., Ding, J. M., and Sun, H. H., 2011, “Structural Design of Shanghai Tower for Wind Loads,” *Procedia Eng.*, **14**, pp. 1759–1767.
 - [24] Coelho, P. G., and Cardoso, J. B., 2012, “Métodos Computacionais Em Engenharia Mecânica,” *Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa*.
 - [25] Sahin, A., and Bayraktar, A., 2016, “MATLAB for All Steps of Dynamic Vibration Test of Structures,” *Intech*, p. 21.
 - [26] Piezotronics, P., 2015, “Acelerómetro” [Online]. Available: <http://insights.globalspec.com/article/1263/specifying-an-accelerometer-function-and-applications>. [Accessed: 05-May-2017].
 - [27] Jezný, J., and Čurilla, M., 2013, “Position Measurement with Hall Effect Sensors,” **1**(7), pp. 231–235.
 - [28] Riscado, P. H. G., 2016, “Determinação Experimental de Rotações Em Estruturas Através Da Utilização de Sensores MEMS,” *Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa*.
 - [29] Eletronics Inc, S., 2012, “SS49E Linear Hall Effect Sensor,” pp. 1–4 [Online]. Available: <http://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/473135/SECELECTRONICS/SS49E.html>.
 - [30] Makprofile, 2013, “Perfil 20x20” [Online]. Available: <http://makprofile.com/>.

- [31] Kjær, B. &, “Product Data - Accelerpmeter Types 4507 and 4608” [Online]. Available: <https://www.bksv.com/en/products/transducers/vibration/Vibration-transducers/accelerometers/4507>. [Accessed: 13-Aug-2017].
- [32] Pereira, J. C. S., 2017, “Acoplamento de Estruturas Com Base Em Funções de Resposta Em Frequência,” Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.
- [33] Silva, T. A. N., 2015, “Development and Implementation of Model Updating Techniques in Structural Dynamics,” Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa.
- [34] Precision, L., 2013, “Capacitive Linear Displacement Sensors,” p. 1 [Online]. Available: <http://www.lionprecision.com/capacitive-sensors/index.html>. [Accessed: 21-Feb-2017].
- [35] Precision, L., 2013, “Eddy-Current Linear Displacement Sensors,” p. 1 [Online]. Available: <http://www.lionprecision.com/eddy-current-sensors/>. [Accessed: 21-Feb-2017].
- [36] ChenYang-Technologies GmbH & Co. KG, “Magnetic Properties of Sintered NdFeB Magnets,” p. 1 [Online]. Available: http://www.cy-magnetics.com/Mag_Pros_NdFeB.htm.
- [37] Blitzkow, D., 2007, *Fundamentos Matemáticos*.
- [38] Yang, C. E., 2016, “Piezoelectric Effect,” ElectronicDesign, p. 1 [Online]. Available: <http://www.electronicdesign.com/power/what-piezoelectric-effect>. [Accessed: 27-May-2017].
- [39] 2010, “Hall Effect,” Natl. Inst. Stand. Technol., p. 1 [Online]. Available: <https://www.nist.gov/pml/engineering-physics-division/hall-effect-measurements-introduction>. [Accessed: 23-Feb-2017].
- [40] Instruments, N., “LabVIEW,” p. 1 [Online]. Available: <http://www.ni.com/pt-pt/shop/labview.html>. [Accessed: 10-Sep-2017].

ANEXO

Anexo I – Erros acumulados da 1.^a simulação numérica do trabalho realizado por Lage *et al.* [10]

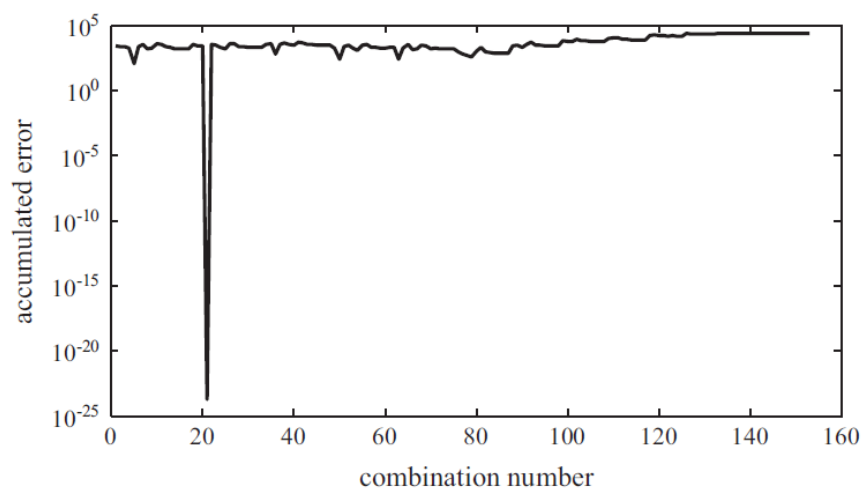


Figura Anexo.1 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=2$ e $\#U=2$, retirado de [10].

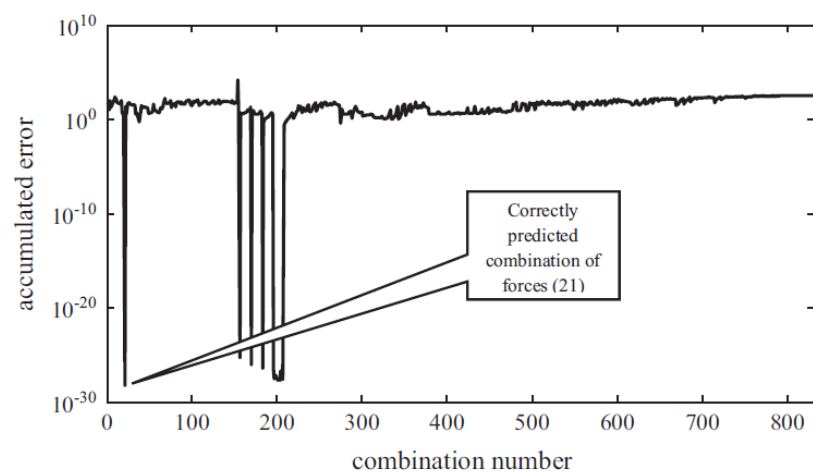


Figura Anexo.2 – Erro acumulado para cada combinação, com $\#K=3$ e $\#U=2$, retirado de [10].

Anexo II – Propriedades magnéticas de ímanes

| Grade | Max. working Temp. | Remanence | | | | Coercivity | | | | Intr. Coercivity | | Max. Energy Product | | | |
|-------|--------------------------|-----------|------|---------|------|------------|-----|----------|------|------------------|--------------|---|-----|-------------------------------|-----|
| | | Br(T) | | Br(kGs) | | bHc(kA/m) | | bHc(kOe) | | iHc (kA/m) | iHc (kOe) | (BH) _{max} (KJ/m ³) | | (BH) _{max} (MGOe) | |
| | | Nom | Min | Nom | Min | Nom | Min | Nom | Min | | | Nom | Min | Nom | Min |
| N30 | 80 | 1.12 | 1.08 | 11.2 | 10.8 | 836 | 780 | 10.5 | 9.8 | 955 | 12 | 239 | 223 | 30 | 28 |
| N33 | 80 | 1.17 | 1.14 | 11.7 | 11.4 | 876 | 820 | 11.0 | 10.3 | 955 | 12 | 263 | 247 | 33 | 31 |
| N35 | 80 | 1.21 | 1.17 | 12.1 | 11.7 | 915 | 860 | 11.5 | 10.8 | 955 | 12 | 279 | 263 | 35 | 33 |
| N38 | 80 | 1.26 | 1.22 | 12.6 | 12.2 | 915 | 860 | 11.5 | 10.8 | 955 | 12 | 303 | 287 | 38 | 36 |
| N40 | 80 | 1.29 | 1.26 | 12.9 | 12.6 | 876 | 836 | 11.0 | 10.5 | 955 | 12 | 318 | 303 | 40 | 38 |
| N42 | 80 | 1.30 | 1.27 | 13.0 | 12.7 | 876 | 836 | 11.0 | 10.5 | 955 | 12 | 334 | 318 | 42 | 40 |
| N45 | 80 | 1.38 | 1.32 | 13.8 | 13.2 | 924 | 876 | 11.6 | 11.0 | 955 | 12 | 366 | 342 | 46 | 43 |
| N48 | 80 | 1.42 | 1.38 | 14.2 | 13.8 | 890 | 835 | 11.19 | 10.5 | 876 | 11 | 390 | 366 | 49 | 46 |
| N50 | 80 | 1.47 | 1.41 | 14.7 | 14.1 | 1035 | 829 | 13.0 | 10.5 | 876 | 11 | 414 | 382 | 52 | 48 |

Figura Anexo.3 – Propriedades magnéticas de ímanes de neodímio consoante o grau, retirado de [36].

APÊNDICE

Apêndice I – Erros acumulados, Forças constantes no domínio da frequência

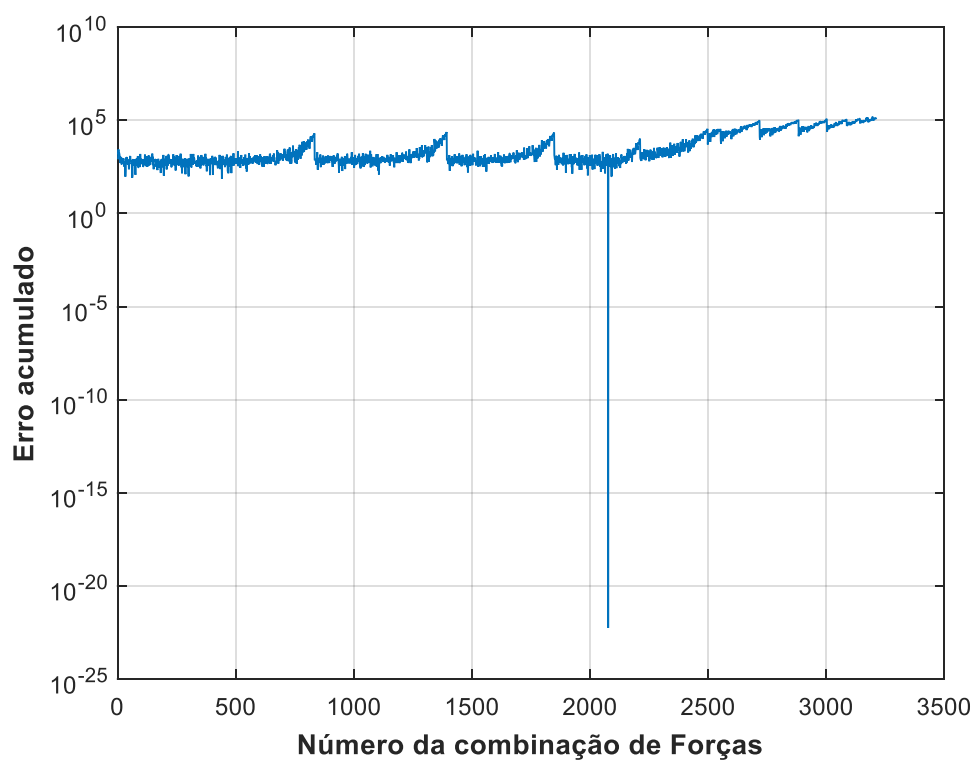


Figura Apêndice.1 – Erro acumulado para cada combinação do 1.o caso – #K=4 e #U=1.

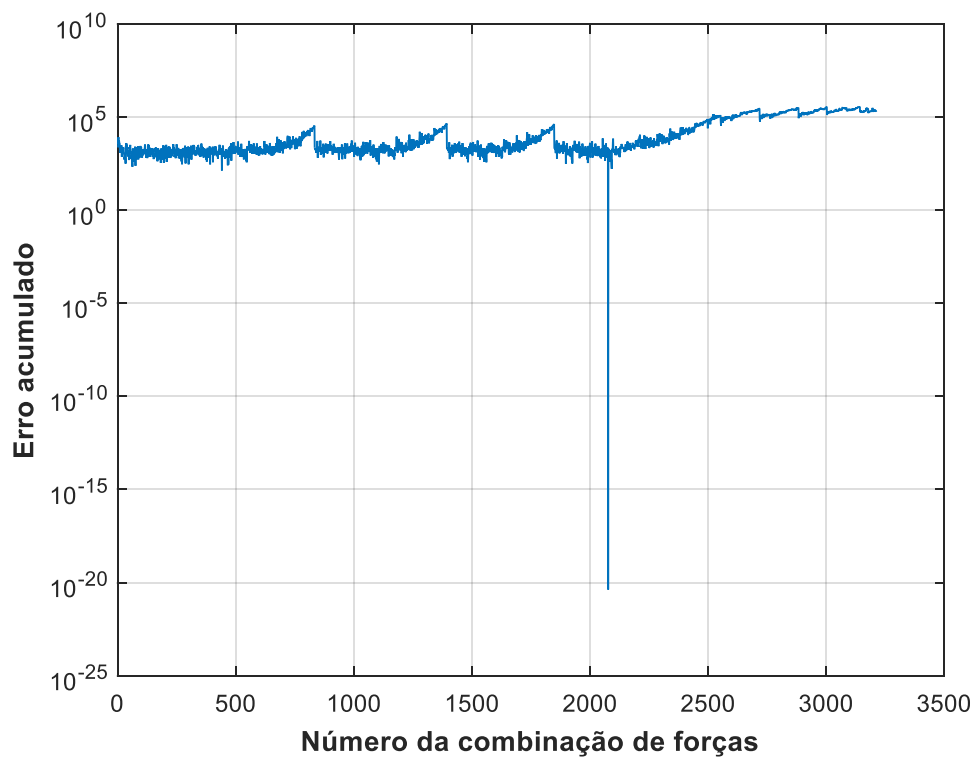


Figura Apêndice.2 – Erro acumulado para cada combinação 2.º caso – #K=4 e #U=2.

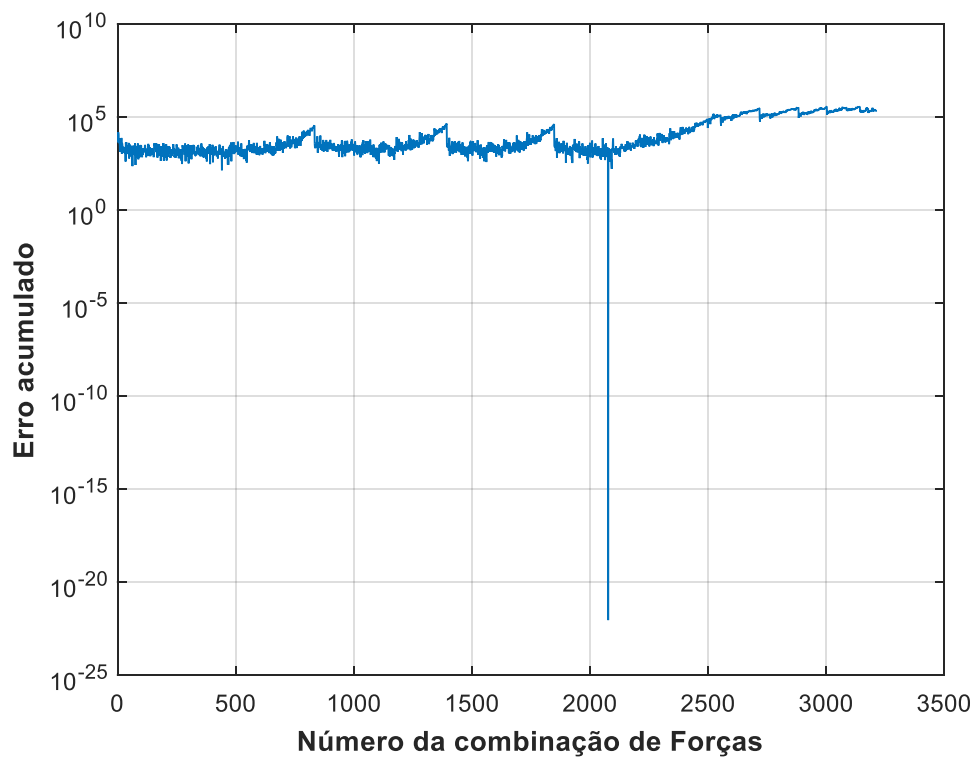


Figura Apêndice.3 – Erro acumulado para cada combinação do 3.º caso – #K=4 e #U=3.

Apêndice II – Erros acumulados, Forças harmônicas no domínio da frequência

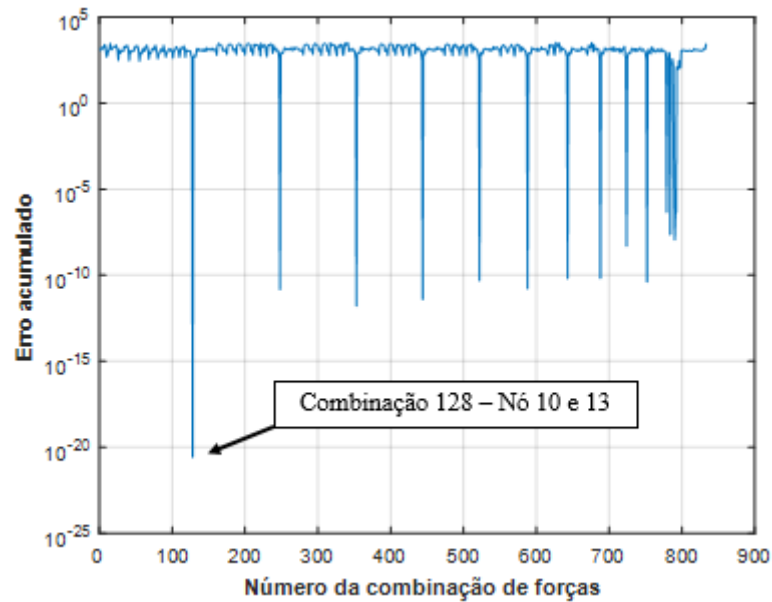


Figura Apêndice.4 – Erro acumulado para cada combinação do 2.º caso – #K=3 e #U=1.

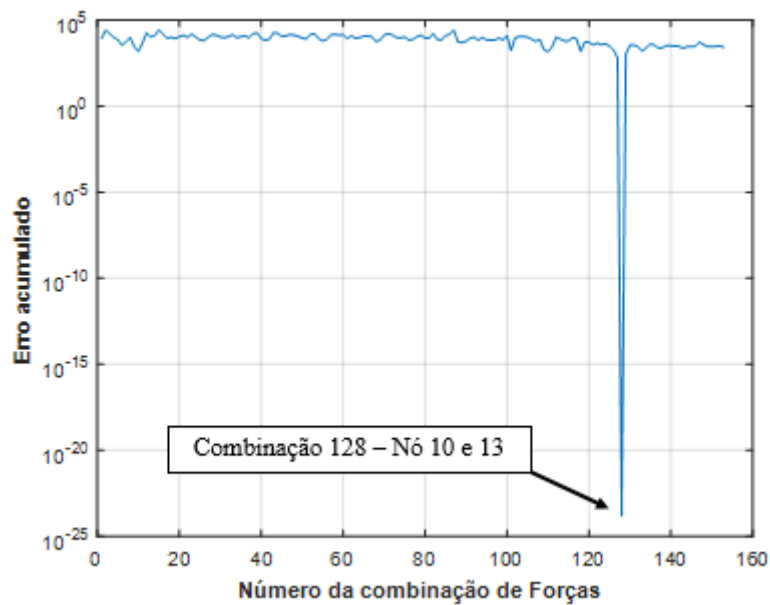


Figura Apêndice.5 – Erro acumulado para cada combinação do 3.º caso – #K=2 e #U=3.

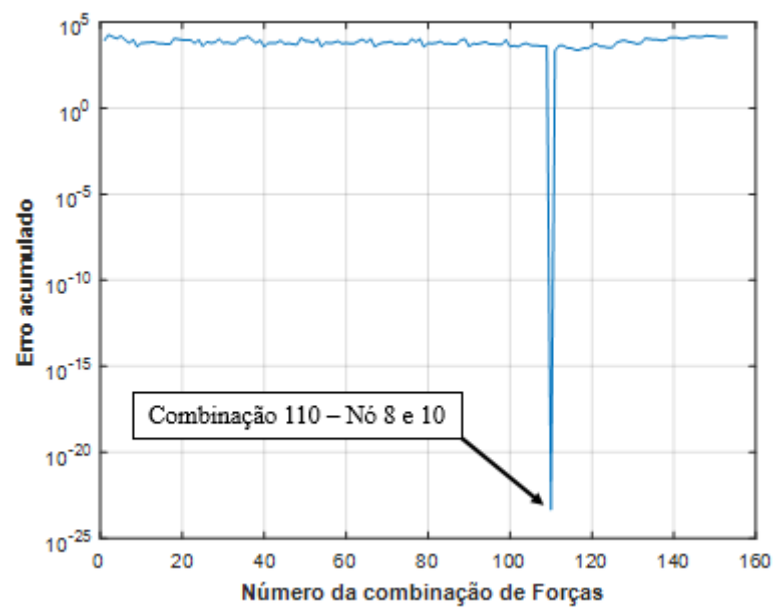


Figura Apêndice.6 – Erro acumulado para cada combinação do 3.º caso – #K=2 e #U=2.

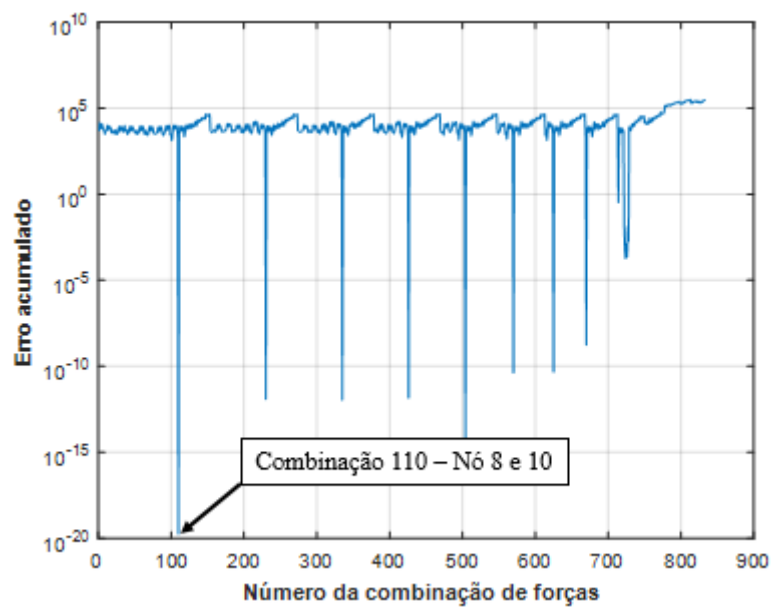


Figura Apêndice.7 – Erro acumulado para cada combinação do 2.º caso – #K=3 e #U=2.

Apêndice III – Curvas referentes à 1.^a calibração

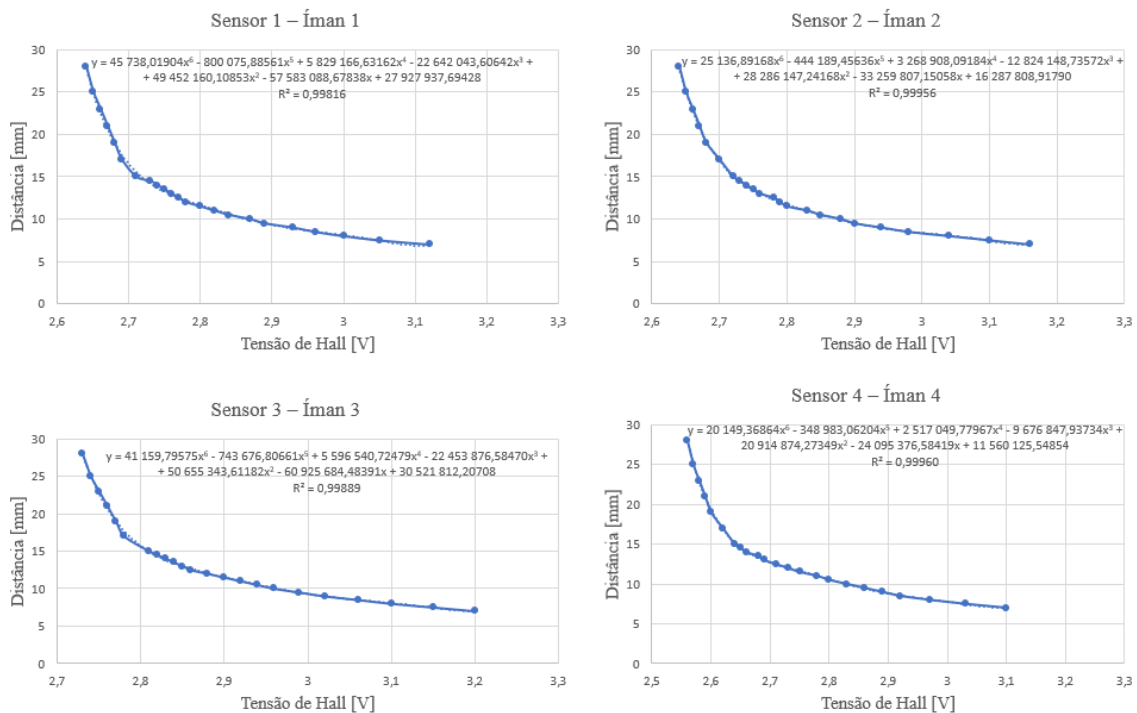


Figura Apêndice.8 – Curvas de calibração, ímanes tipo 2 – 1.^a calibração.

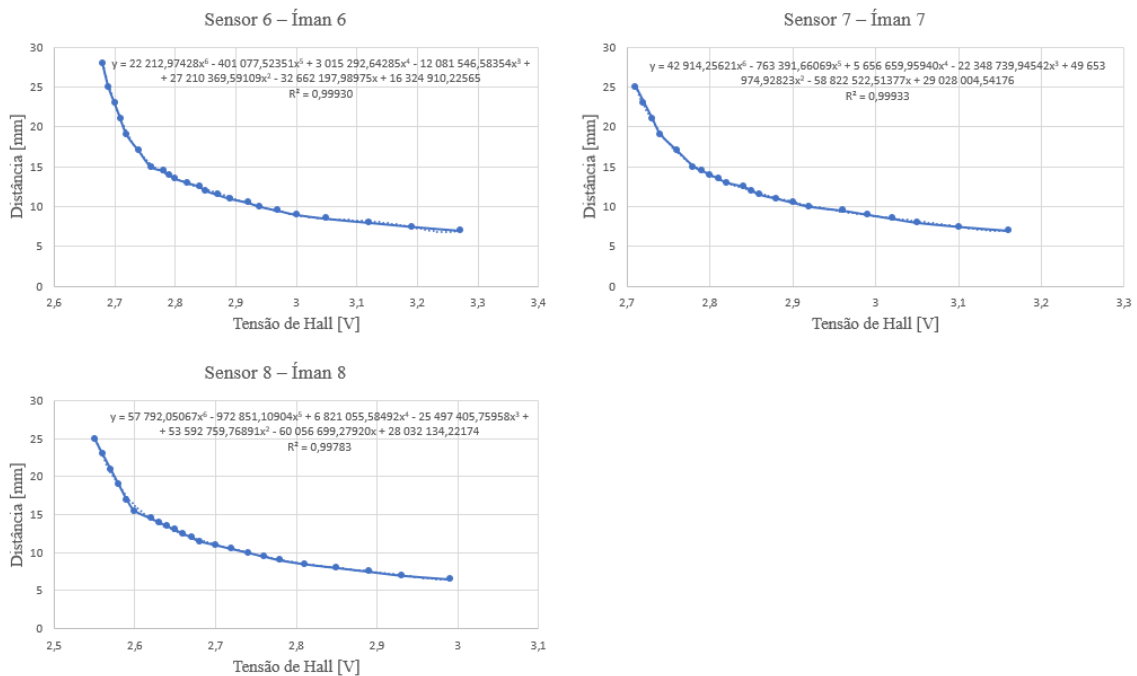


Figura Apêndice.9 – Curvas de calibração, ímanes tipo 2 – 1.^a calibração.

Apêndice IV – Curvas referentes à 2.^a calibração

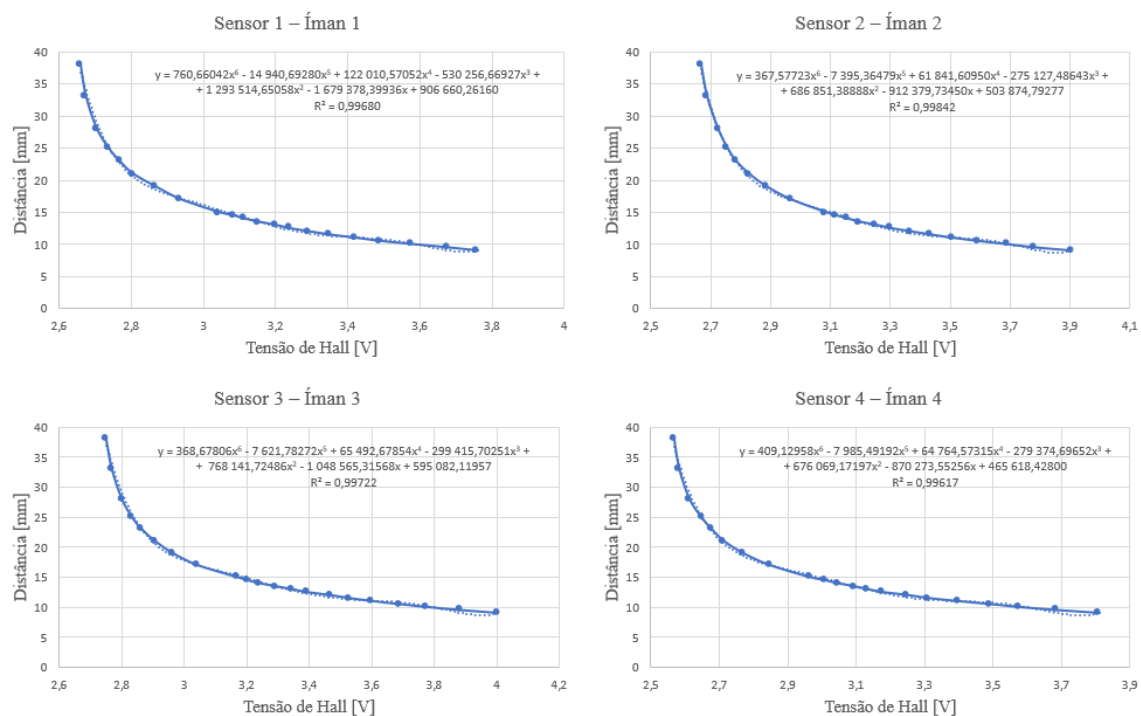


Figura Apêndice.10 – Curvas de calibração, ímanes tipo 1 – 2.^a calibração.

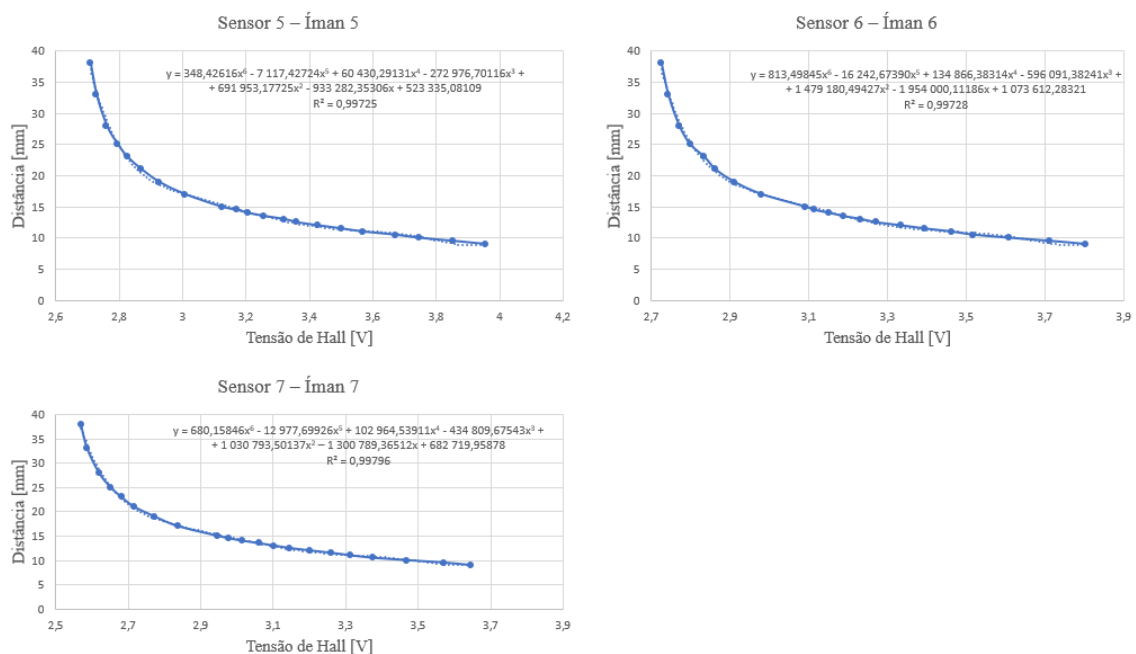


Figura Apêndice.11 – Curvas de calibração, ímanes tipo 1 – 2.^a calibração.

Apêndice V – Curvas referentes à 3.^a calibração

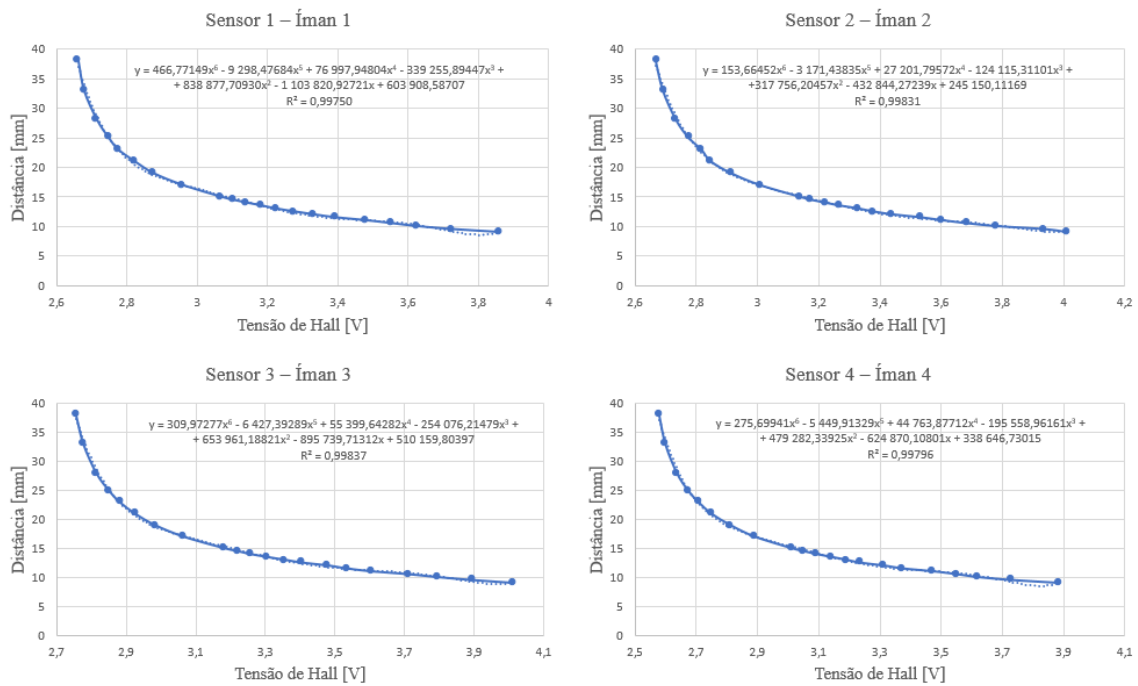


Figura Apêndice.12 – Curvas de calibração, ímanes tipo 1 – 3.^a calibração.

Apêndice VI – Aparelhos utilizados no Teste 2 – Excitação por shaker



Figura Apêndice.13 – Gerador de sinais.



Figura Apêndice.14 – Frequencímetro de sinal.



Figura Apêndice.15 – Amplificador de sinal.

Apêndice VII – Comparação de FRFs

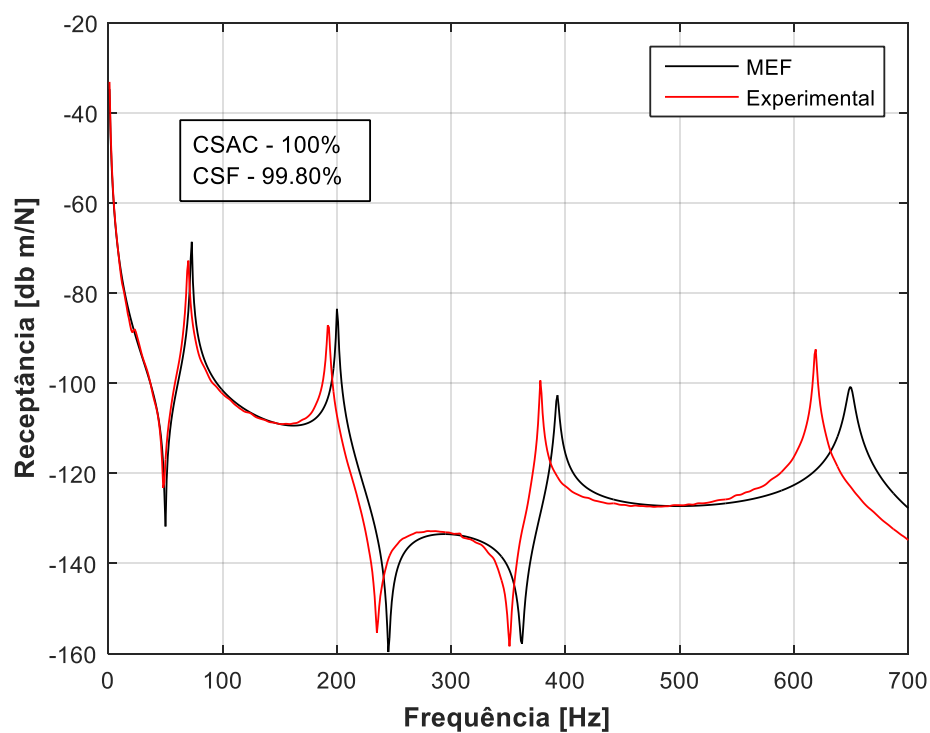


Figura Apêndice.16 – Funções de resposta em frequência $H_{7,10}$, experimental e numérica antes da atualização.

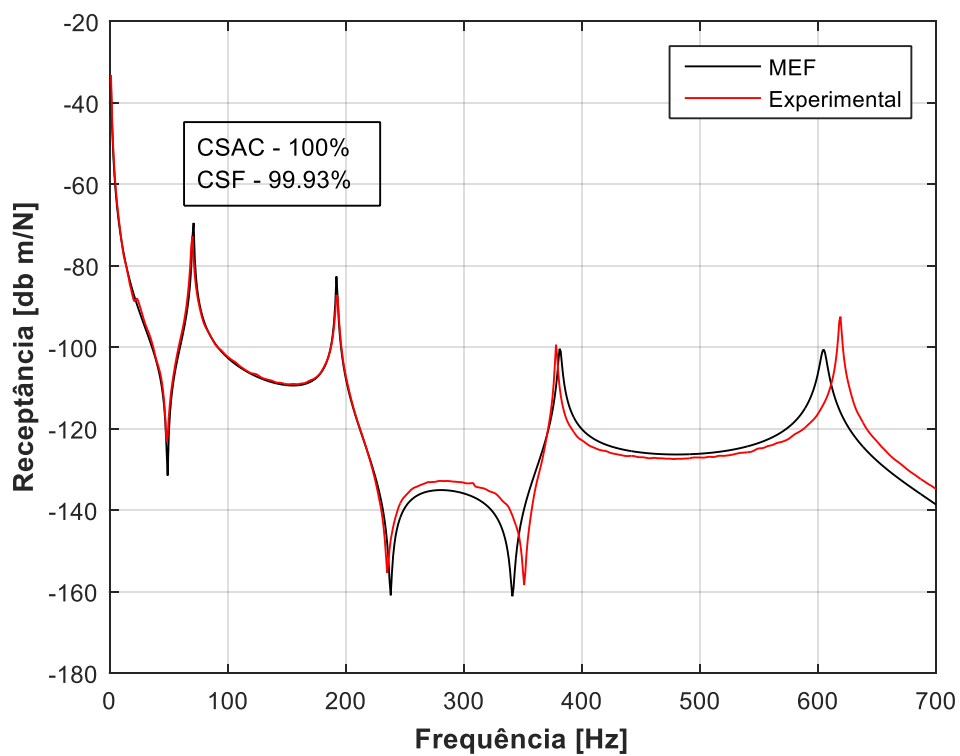


Figura Apêndice.17 – Funções de resposta em frequência $H_{7,10}$, experimental e numérica atualizada.

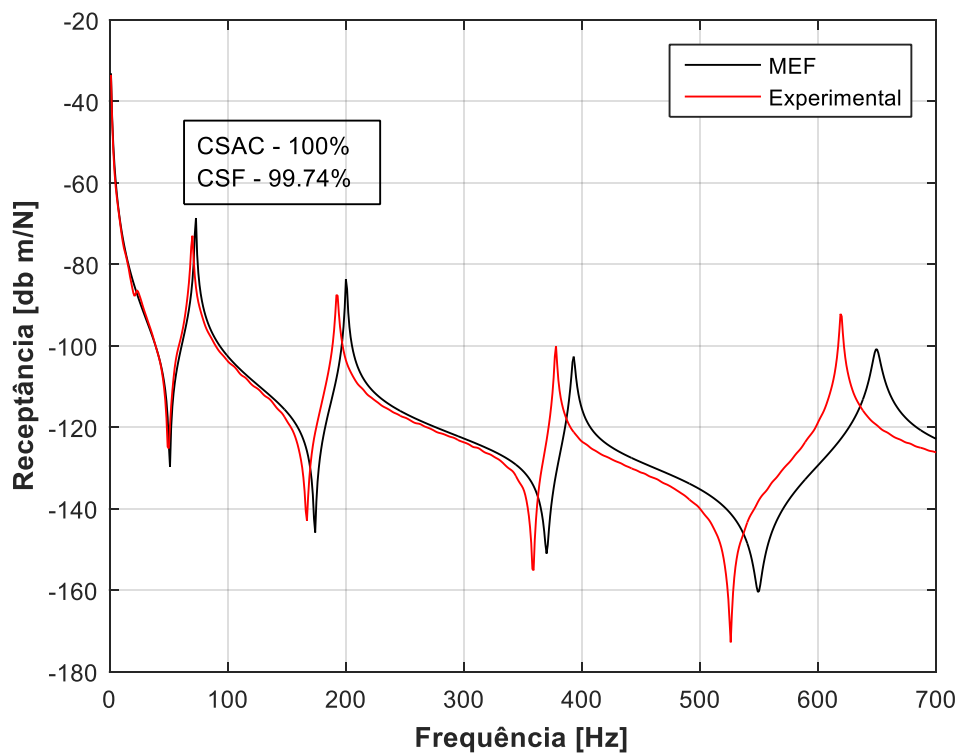


Figura Apêndice.18 – Funções de resposta em frequência $H_{11,10}$, numérica e experimental, antes da atualização.

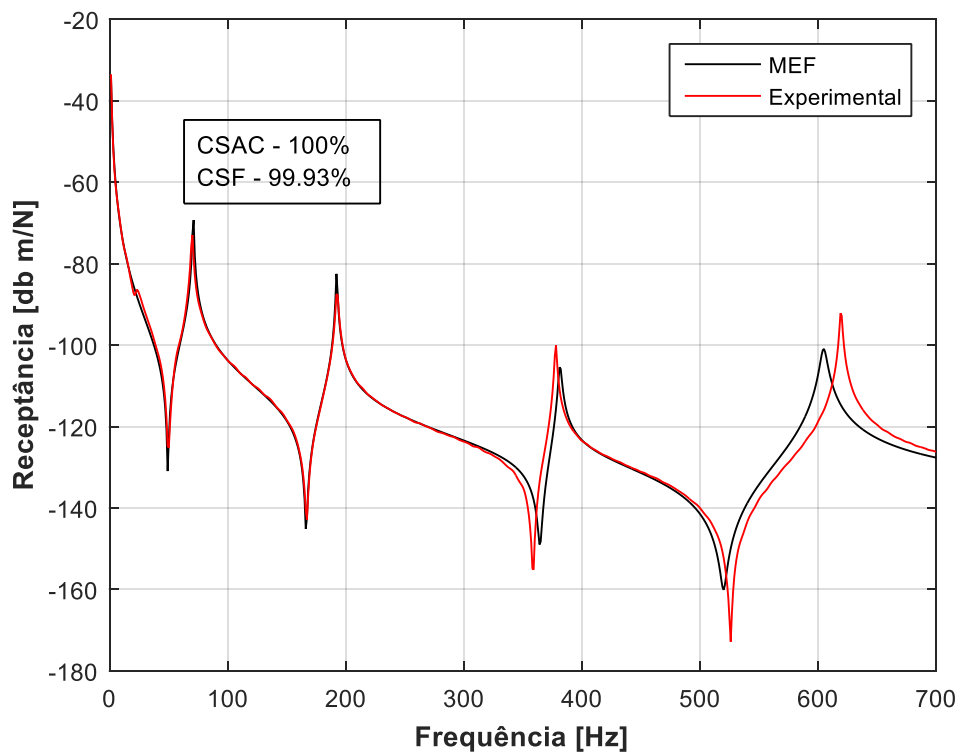


Figura Apêndice.19 – Funções de resposta em frequência $H_{11,10}$, numérica e experimental atualizada.

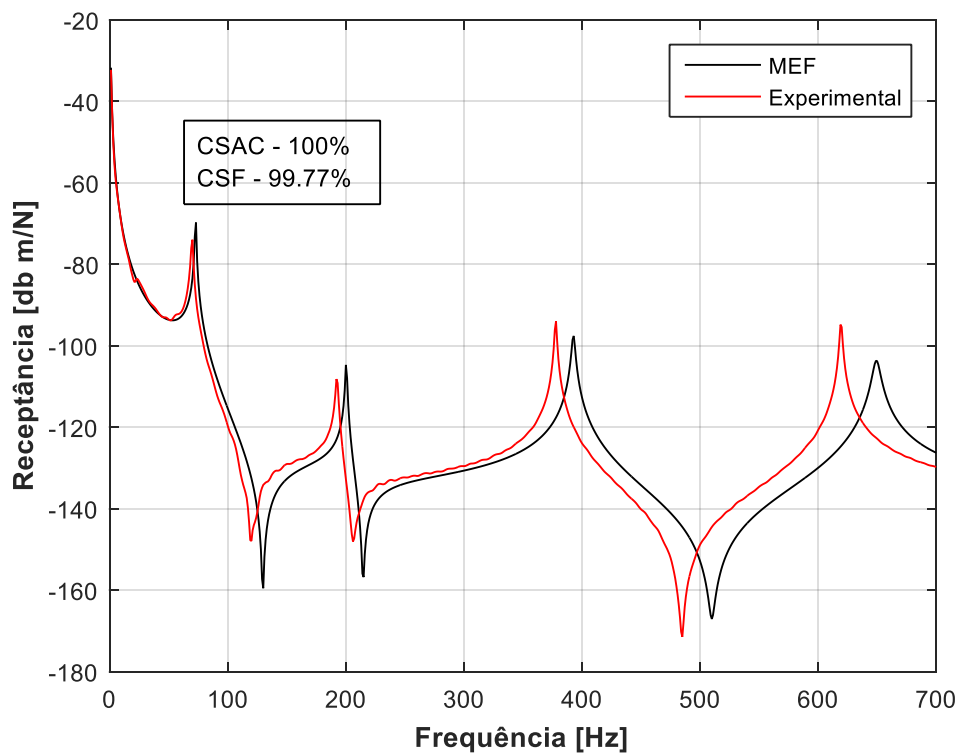


Figura Apêndice.20 – Funções de resposta em frequência $H_{15,10}$, experimental e numérica antes da atualização.

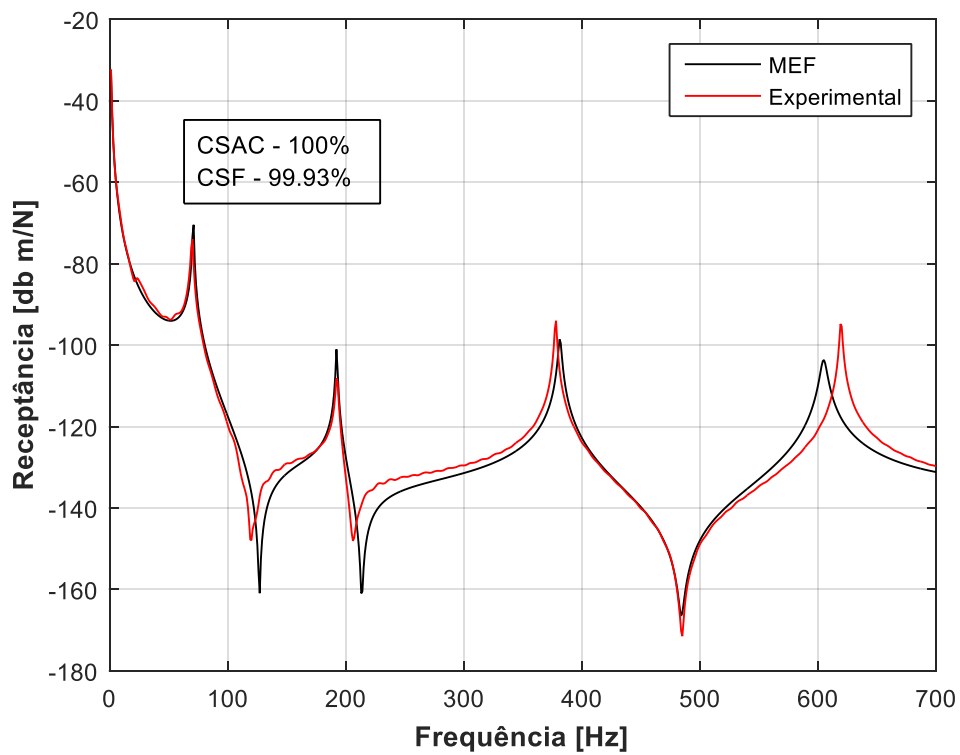


Figura Apêndice.21 – Funções de resposta em frequência $H_{15,10}$, experimental e numérica atualizada.

Apêndice VIII – Espectros de deslocamento

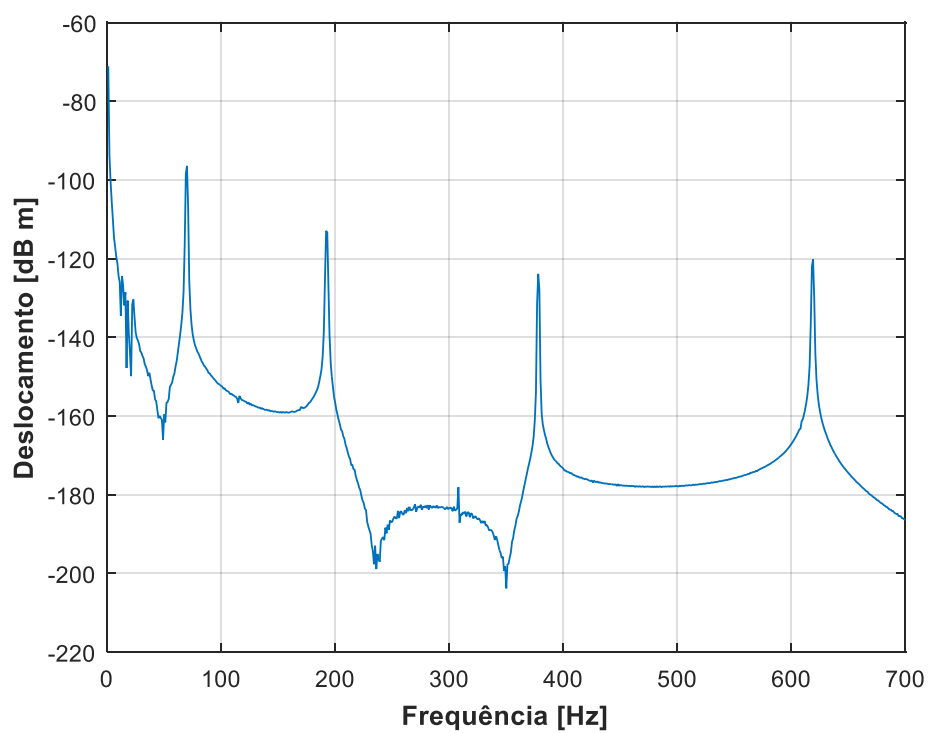


Figura Apêndice.22 – Espectro do deslocamento no nó 7.

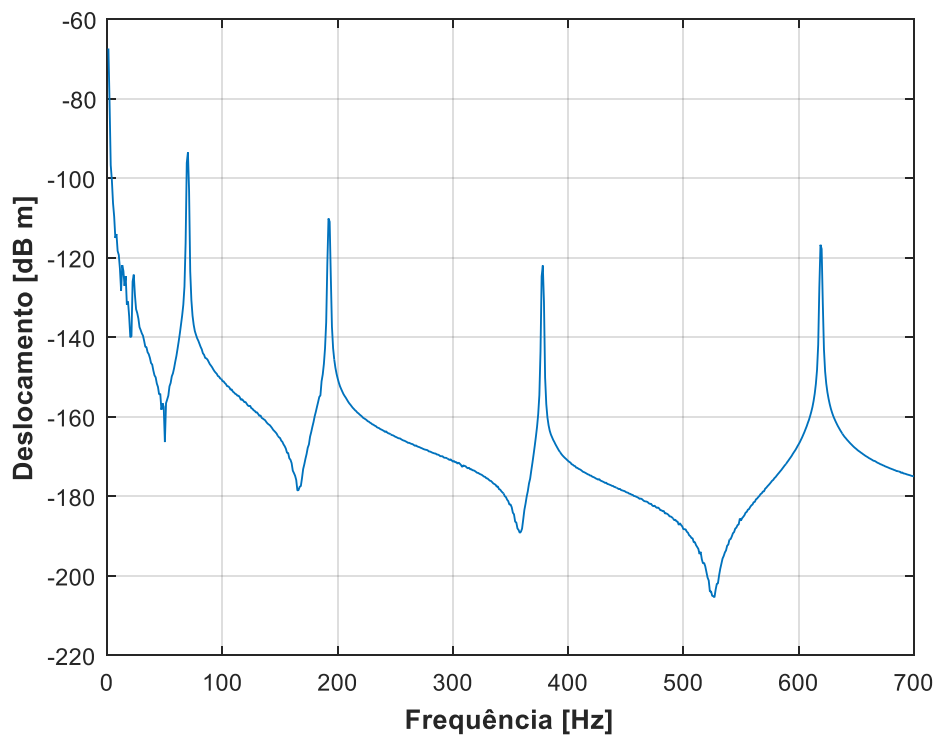


Figura Apêndice.23 – Espectro de deslocamento no nó 11.

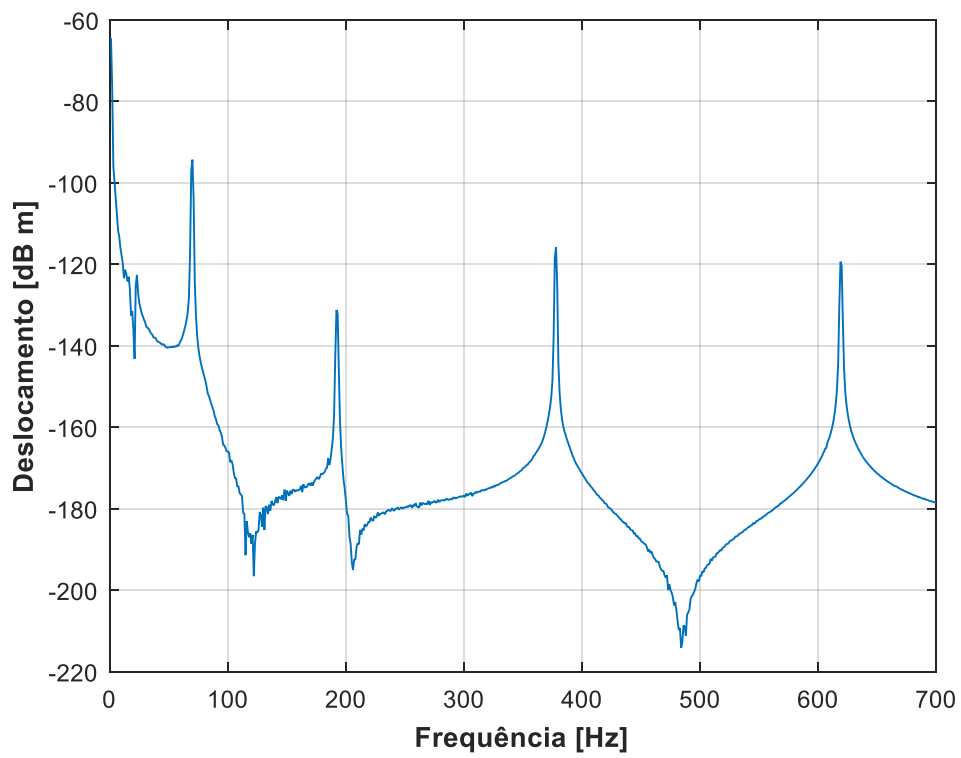


Figura Apêndice.24 – Espectro do deslocamento no nó 15.